

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Poitiers septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

Déterminer, pour  $p = 1, 2, 3, 4$ , les restes de la division de  $5^p$  par 13.

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, le nombre  $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$  est divisible par 13.

EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = (x+1)e^{-|x|}.$$

1. Étudier cette fonction; est-elle dérivable en 0?

Construire la courbe représentative  $C$  de  $f$  dans un repère orthonormé; préciser l'allure de la courbe  $C$  au voisinage du point d'abscisse 0.

2. Déterminer une primitive de la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Déterminer une primitive de la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] -\infty; 0]$ .

3. Définir la primitive de  $f$  qui s'annule en  $x = 0$ .

4. Calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  du domaine compris entre la courbe  $C$ , l'axe des abscisses  $x'x$  et les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = \lambda$ ,  $\lambda$  étant un réel positif.

L'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  admet-elle une limite finie lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ ?

PROBLÈME

On considère un plan affine euclidien  $E$  orienté de base orthonormée directe  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Partie A

La fonction vectorielle  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $E$  est définie par  $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  avec

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2^t} \cos \frac{\pi}{2} t \\ y(t) &= \frac{1}{2^t} \sin \frac{\pi}{2} t \end{cases}$$

1. Cette fonction est-elle définie sur  $\mathbb{R}$ ?

Préciser les limites, si elles existent, de  $x(t)$  et de  $y(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et quand  $t \rightarrow -\infty$ .

2. Dans toute la suite du problème, **on se restreint à**  $t \in \mathbb{R}_+$  et on considère le mouvement d'un point  $M(t)$  défini par  $\vec{OM}(t) = f(t)$ .

a. Représenter  $M(0), M(1), M(2), M(3)$ .

- b. Quelle est la vitesse du point  $M(t)$  à l'instant 0? Préciser la tangente à la trajectoire en  $M(0)$ .
- c. Quelle est la norme du vecteur-vitesse? Décrire le mouvement de  $M$ .
3. Démontrer que les intersections de la trajectoire avec les axes correspondent aux images  $M(n)$  des nombres complexes définis pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$z(n) = x(n) + iy(n);$$

préciser le module et l'argument de  $z(n)$ .

### Partie B

On considère, dans  $E$ , les images  $M(n)$  des nombres complexes définis pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$z(n) = \frac{1}{2^n} \left( \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right).$$

1. Dédurre de la relation entre  $z(n)$  et  $z(n+1)$ , qu'il existe une similitude  $s$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M(n+1) = s(M(n));$$

(on montrera que  $s$  est la similitude de centre  $O$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et de mesure d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ).

2. Nature de  $h = s \circ s$ . Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}, \quad M(2(p+1)) = s \circ s(M(2p))$ ; que peut-on dire des points  $M(2p)$ ?
3. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la trajectoire de  $M(t)$  et de la droite  $D_\alpha$  qui passe par l'origine et admet  $\vec{v} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$  pour vecteur directeur.
- b. Soit deux points d'intersection  $M(t')$  et  $M(t'')$  de la droite  $D_\alpha$  et de la trajectoire de  $M(t)$ , correspondant respectivement à deux valeurs consécutives  $t'$  et  $t''$  ( $t' < t''$ ) de  $t$ .  
Montrer que :  $M(t'') = h(M(t'))$ .
- c. En déduire que la trajectoire de  $M(t)$  est globalement invariante par  $h$ ; l'est-elle aussi par  $s$ ?