

∞ Baccalauréat C Poitiers septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

1. Montrer que si a' et b' sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors $(a' + b')$ est premier avec $a'b'$.
2. Déterminer les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels, admettant m pour plus petit commun multiple et tels que :

$$5(a + b)^2 = 147m.$$

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, à tout point M d'affixe $z = x + iy$, on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que :

$$z' = (3 + 2i)z + 3iz - 1.$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que O, M, M' soient alignés.
2. Montrer que cet ensemble des points M est une conique dont on précisera les foyers, sommets, directrices et l'excentricité. Dessiner cet ensemble.

PROBLÈME

Partie A

À tout réel m , on associe l'application f_m de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$f_m(x) = x + m \sin x.$$

On désigne par \mathcal{C}_m la courbe représentative de f_m dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que O est centre de symétrie pour \mathcal{C}_m .
2. Soit Γ_k l'ensemble des points de \mathcal{C}_m qui satisfont à

$$(2k - 1)\pi \leq x \leq (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que Γ_k se déduit de Γ_0 par une translation que l'on précisera.

3.
 - a. Étudier, suivant les valeurs de m , le sens de variation de l'application f_m .
 - b. Pour quelles valeurs de m , f_m est-elle une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} ?
 - c. Construire les courbes représentatives des restrictions à $[-\pi ; +\pi]$ de $f_{-2}, f_{1/2}, f_1, f_2$.
4. On suppose $m < -1$.

- a. Montrer que, lorsque x décrit l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'ensemble des valeurs de f_m possède un minimum y_0 pour $x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Soit N_m le point de coordonnées $(x_0; y_0)$ de \mathcal{C}_m . Montrer que ses coordonnées sont liées pour la relation :

$$y_0 = x_0 - \operatorname{tg} x_0.$$

Construire l'ensemble des points N_m , lorsque m décrit l'intervalle $] -\infty; -1[$.

- b. Montrer que :

$$\forall x \in [0; x], \quad f_m(x) \leq x - \operatorname{tg} x.$$

Montrer que l'aire du domaine, ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq x_0, \quad \text{et} \quad x + m \sin x \leq y \leq x - \operatorname{tg} x,$$

s'exprime à l'aide de m seul.

Partie B

Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application T de P dans P qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' &= x + \frac{1}{2} \sin x \\ y' &= y + \frac{1}{2} \sin y. \end{cases}$$

1. Montrer que T est une bijection de P sur P . Déterminer l'ensemble des points invariants par T .
2. Soit Q l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $|x| < \pi$ et $|y| < \pi$? Montrer que la restriction de T à Q est une bijection de Q sur Q . Préciser les points invariants de Q .

Partie C

Soit S l'application de P dans P qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y. \end{cases}$$

1. Montrer que S est une similitude dont on précisera les éléments (centre, angle, rapport). Définir S^{-1} .

2. Soit K l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées vérifient :
ou bien $|x| = \pi$ et $|y| \leq \pi$, ou bien $|x| \leq \pi$ et $|y| = \pi$?
Construire sur une même figure : K , $S(K)$ et $S^{-1}(K)$, en justifiant cette construction.

Partie D

On note F l'application de P dans P définie par $F = S^{-1} \circ T \circ S$.

1. Démontrer que si $M'(x' ; y')$ est l'image de $M(x ; y)$ par F , on a :

$$\begin{cases} x' &= x + \frac{1}{2} \sin x \cos y \\ y' &= y + \frac{1}{2} \sin y \cos x. \end{cases}$$

2. Dédire des questions précédentes que F est une bijection de P sur P et que $S^{-1}(Q)$ est globalement invariant par F .
3. Démontrer que la restriction de F au domaine Q a cinq points invariants que l'on précisera.