Baccalauréat C Poitiers septembre 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Étant donnés deux entiers naturels non nuls a et b, on désigne respectivement par d et m le PGCD et le PPCM de a et b. Déterminer l'ensemble S des paires $\{a~;~b\}$ telles que

$$d + m = 126 \quad \text{et} \quad 5 < d < 10.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l c l l}
f(x) & = & x\text{e}^{1-x^2} & \text{si} \quad x \leqslant 1\\
f(x) & = & ax^2 + bx & \text{si} \quad x > 1 \text{ où } (a~;~b) \in \mathbb{R}^2.
\end{array}\right.$$

1. Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable au point 1.
2. Étudier alors les variations de f et construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
3. On désigne par D l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x~;~y)$ sont telles que :

   $$0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

   Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de D.

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien orienté, $\mathcal{V}$ le plan vectoriel associé à P et $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct de P.

1. Vérifier que le sous-ensemble E de P d'équation $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$ est une ellipse dont on précisera le centre ω, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité. Représenter E.
2. Soit g l'application affine admettant ω comme point invariant et dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice par rapport à la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

   Vérifier que g est bijective. Calculer les coordonnées de $g(M)$ en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de M. Montrer que $g(\text{E})$, l'image de E par g, est le cercle C ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse E.

3. K étant un sous-ensemble de P, on dit qu'une bijection affine f de P dans P laisse K invariant si et seulement si $f(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$. Montrer que l'ensemble F des bijections affines f de P dans P qui laissent K invariant, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

4. **a.** On appelle G le groupe des bijections affines de P dans P qui laissent E invariant. Donner des exemples d'éléments de G.

b. On appelle G_1 le groupe des bijections affines de P dans P qui laissent C invariant.

i. Montrer que f_1, appartient à G_1 si et seulement si $g^{-1} \circ f_1 \circ g$ appartient à G.

ii. Soit h l'application de G_1 dans G définie par :

$$h\left(f_1\right) = g^{-1} \circ f_1 \circ g.$$

Montrer que h est un isomorphisme de G_1 sur G.

5. Soit f_1 une bijection affine de P dans P qui laisse C invariant.

a. On pose $\omega_1 = f_1(\omega)$. Un diamètre de C passant par ω_1, coupe C en A, et B_1. Soient $\mathrm{A} = f_1^{-1}(\mathrm{A}_1)$ et $\mathrm{B} = f_1^{-1}(\mathrm{B}_1)$. En utilisant les propriétés des bijections affines, montrer que $w_1 = \omega$.

b. Soit φ_1 l'endomorphisme associé à f_1. Montrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ de $\mathscr{V}$, le point M tel que $\overrightarrow{\omega M} = \dfrac{3}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{V}}\right\|}\overrightarrow{\mathrm{V}}$ appartient au cercle C, et en déduire que $\left\|\varphi_1\left(\overrightarrow{\mathrm{V}}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{V}}\right\|$.

c. En déduire que les éléments de G_1 sont des isométries affines que l'on déterminera,

6. **a.** Déduire des questions précédentes que les bijections affines f appartenant à G laissent ω invariant.

b. Donner la forme générale des matrices par rapport à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ des endomorphismes qui leur sont associés.

c. Quelles sont les isométries affines de G ?