∽ Baccalauréat Poitiers 1950 ∾
Série mathématiques

I

1er sujet
Produit de deux homothéties dans l'espace.

2e sujet
Diverses formes de la condition pour que quatre points d'un plan soient sur un même cercle.

3e sujet
Théorèmes de Poncelet pour les tangentes issues d'un point à une conique. (Ces théorèmes seront traités avec celle des définitions qui paraîtra la plus commode.)

II

Dans ce qui suit on appelle entier relatif tout nombre entier positif, négatif ou nul, et l'on représente ces nombres par des lettres minuscules. On représente par des lettres majuscules tout nombre de la forme $N = a + b\sqrt{2}$, où a et b, conformément à la convention précédente, sont des entiers relatifs.
On rappelle qu'il n'existe aucun nombre entier, ni aucune fraction dont le carré soit égal à 2.

1. Démontrer que si N est nul, a et b sont nuls.
   Démontrer plus généralement que si le nombre $N = a+b\sqrt{2}$ est égal au nombre $N_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$, on a nécessairement
   $$a = a_1 \quad \text{et} \quad b = b_1.$$
   Les deux nombres $N = a + b\sqrt{2}$ et $N_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ étant choisis, mettre le produit $N_2 = N \cdot N_1$ sous la forme $a_2 + b_2\sqrt{2}$ et calculer les entiers relatifs a_2 et b_2 en fonction de a, b, a_1, b_1.
2. On suppose $|a|$ et $|b|$ non nuls et premiers entre eux, pour le nombre $N = a+b\sqrt{2}$. On suppose en outre qu'il existe un nombre $N_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ tel que le produit $N \cdot N_1$ soit un entier relatif.
   Monter que a_1 et b_1 sont de la forme,
   $$a_1 = ka, \quad b_1 = -kb,$$
   k étant un entier relatif.
   On suppose maintenant $N \cdot N_1 = 1$ et $|b| \neq 0$. Montrer qu'il en résulte $|a| \neq 0$, et $|a|$ et $|b|$ premiers entre eux.
   $N = a + b\sqrt{2}$ étant donné, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse trouver N_1 tel que
   $$N \cdot N_1 = 1 \quad \text{est} \quad a^2 - 2b^2 = \pm 1.$$
   Donner l'expression du nombre N_1, inverse de N, ainsi associé au nombre N.

3. On appelle *nombre unitaire* tout nombre $N = a + b\sqrt{2}$ qui vérifie la condition $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

Vérifier que le produit et le quotient de deux nombres unitaires sont encore des nombres unitaires.

Vérifier que $1 + \sqrt{2}$ est un nombre unitaire.

Pour tout nombre unitaire N, on construit le point de coordonnées a et b par rapport à deux axes rectangulaires. Ces points font partie du lieu d'équation $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, x et y étant les coordonnées, entières ou non. Construire ce lieu.

4. Soit $N = a + b\sqrt{2}$ un nombre unitaire dans lequel on suppose a et b positifs. En comparant les carrés des nombres b, a, $2b$, démontrer la double inégalité

$$b \leqslant a \leqslant 2b.$$

Former le quotient $N_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ du nombre N par le nombre $1 + \sqrt{2}$.

Montrer que $N_1 = 1$ lorsque $a = b$ et que, dans l'hypothèse $a \neq b$, les nombres a_1 et b_1 vérifient $0 < a_1 < a$, $0 < b_1 < b$.

En conclure que les divisions successives par $1 + \sqrt{2}$ aboutissent au nombre 1 après un nombre fini d'opérations, et qu'il existe un entier positif n tel que $N = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n$.

Montrer que tous les nombres unitaires sont donnés par la formule

$N = \pm\left(1 + \sqrt{2}\right)^r$, où r est un entier relatif quelconque.

N. B. - Barème : $4 + 5 + 5 + 6$.