

☞ Baccalauréat S Polynésie septembre 1996 ☞

EXERCICE 1

5 points

Enseignement obligatoire

Un livreur de pizzas doit servir un client qui se trouve à 6 km et qui exige d'être servi à 20 h 00 précisément.

Pour se déplacer, il utilise un scooter qui roule constamment à 36 km/h (on néglige les phases d'accélération et de décélération).

Sur son trajet, il va rencontrer 2 feux tricolores non synchronisés et indépendants.

S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.

S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

- la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $1/2$,
- la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $1/4$.

Soit T la variable aléatoire « temps en minutes mis par le livreur pour arriver à destination ».

1. **a.** Calculer en justifiant le calcul la probabilité $p(T = 11)$.
- b.** Donner la loi de probabilité de T .
2. Calculer l'espérance mathématique de T .
3. Représenter la fonction de répartition de T .
4. Le livreur part à 19 h 49 :
 - a.** Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en retard ?
 - b.** Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en avance ?

EXERCICE 1

5 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$, $AD = 1$ et $AB = 3$.

Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \sqrt{2}\overrightarrow{BC}$.

1. **a.** Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure du déroulement de l'exercice.
- b.** Montrer qu'il existe une rotation r telle que $B = r(D)$ et $F = r(E)$.
- c.** Déterminer l'angle de cette rotation.
- d.** Construire, en justifiant la réponse, le centre Ω de cette rotation.
2. Le plan est muni du repère orthonormal de sens direct $(A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.
 - a.** Déterminer les affixes des points A, B, C, D, E, F.
 - b.** Soit M un point du plan d'affixe z et M' , d'affixe z' , son image par r .
Donner la relation permettant d'exprimer z' en fonction de z .
Déterminer les coordonnées exactes de Ω .
3. Quelle est l'image par r du cercle circonscrit au triangle ADE ?

EXERCICE 2

4 points

1. La lettre z désignant un nombre complexe, on considère le polynôme

$$P(z) = z^2 + 4z + 29.$$

Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. (O, \vec{u}, \vec{v}) étant un repère orthonormal du plan (unité : 0,5 cm), on désigne par A, B, C les points d'affixes respectives

$$z_A = 3, \quad z_B = -2 + 5i, \quad z_C = -2 - 5i.$$

Soit I et J les points d'affixes $z_I = 2 + 3i$ et $z_J = 18 - 5i$.

- Placer les points A, B, C, I, J.
- Calculer les distances IB, IC, BC et montrer que les points A, B, I, C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon et que l'on tracera.
- Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_B - z_I}{z_J - z_I}$.

Qu'en résulte-t-il pour les points I, B, J?

PROBLÈME

11 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3.$$

- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Étudier le signe de $f''(x)$ sur \mathbb{R} et en déduire le sens de variation de f' sur \mathbb{R} .
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ et calculer $f'(0)$.
En déduire que f' s'annule pour deux valeurs α et β de x telles que $\alpha < 0 < \beta$.
- On se propose de calculer α et β . Pour cela on pose $t = e^x$ (ou ce qui revient au même $x = \ln t$).
 - Montrer que si $f'(x) = 0$, alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.
 - Montrer que $t = 2$ est solution de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$t^3 - 5t + 2 = (t - 2)(t^2 + at + b).$$

- En déduire les solutions de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$.
- En déduire alors les valeurs de α et β .

3. a. Vérifier que pour tout réel x non nul :

$$f(x) = x \left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x} \right).$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- b. Dresser le tableau des variations de f .
4. Construire la représentation graphique (\mathcal{C}) de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unités 2 cm).
5. Soit S la portion du plan comprise entre la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$.
Calculer, en cm^2 , l'aire de S à 0,01 près.

Partie B

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - y' - 2y = -20x - 4.$$

1. Montrer que f est solution de (E) .
2. On pose $z = y - f$.
 - a. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation (E') : $z'' - z' - 2z = 0$.
 - b. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .