Baccalauréat S Polynésie juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm, on considère les points A et B, d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1$ et
$z_{\mathrm{B}} = 3\mathrm{i}$.
Soit la fonction f de P privée du point A dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \mathrm{i}\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+1}\right)$ (1).

1. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = 2-\mathrm{i}$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :
   $\mathrm{O}M' = \dfrac{\mathrm{B}M}{\mathrm{A}M}$ et $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$ (modulo 2π).
4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
   a. L'ensemble E des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (F) de centre O, de rayon 1.
   b. L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.
5. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note C_1 l'image de C par R.
   a. Déterminer l'affixe de C_1.
   b. Montrer que C_1 appartient à l'ensemble F.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Une boîte contient 8 cubes : $\left\{\begin{array}{c}\text{1 gros rouge et 3 petits rouges}\\ \text{2 gros verts et 1 petit vert}\\ \text{1 petit jaune}\end{array}\right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».
   a. Calculer la probabilité de A.
   b. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\dfrac{2}{7}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. L'enfant répète n fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.
   On note P_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.
   a. Déterminer P_n en fonction de n.
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $\quad 91x + 10y = 1$.
   a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
   b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
   c. Résoudre (E').
2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).
3. On considère l'équation (E$''$) $A_3x + A_2y = 3\,296$.
   a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation (E'').
   b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels.
   Le déterminer.

PROBLÈME **11 points**
Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie ln e = 1.
On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + x\mathrm{e}}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = -2\ln x - x\mathrm{e} + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g.
3. Montrer que dans $[0{,}5\,;\ 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Construire Γ.

Partie C : Intégrale et suite

Soit $I_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $A_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}}.$$

2. **a.** Montrer que $A_n = I_n + \mathrm{e}$.

b. Calculer I_0 et A_0.

c. Donner une interprétation géométrique de A_0.

3. Montrer que la suite (A_n) converge vers e.