

∞ Baccalauréat C Polynésie française juin 1981 ∞

EXERCICE 1

L'espace vectoriel euclidien \mathcal{E}_3 étant muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on appelle φ l'application linéaire de \mathcal{E}_3 dans lui-même définie par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) &= 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) &= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) &= -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

1. φ est-elle bijective?
2. Déterminer l'image et le noyau de φ et vérifier qu'ils sont orthogonaux.
3. Montrer que la restriction de φ à $\text{Im } \varphi$ est celle d'une homothétie vectorielle dont on indiquera le rapport ($\text{Im } \varphi$ représente l'image de φ).

En déduire que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle. Montrer qu'il en est de même pour φ^n , où φ^n est définie pour n de \mathbb{N}^* par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} \varphi^1 &= \varphi \\ \varphi^{n+1} &= \varphi^n \circ \varphi. \end{cases}$$

EXERCICE 2

Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0.$$

Représenter chacune des solutions dans le plan complexe (plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct).

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad y' - 2y = 8x^2 - 8x,$$

c'est-à-dire à l'ensemble \mathcal{S} des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - 2f(x) = 8x^2 - 8x.$$

Partie A

On rappelle que l'ensemble \mathcal{F}' des fonctions dérivables sur \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel \mathcal{F} des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} (muni de l'addition de ces applications et de leur multiplication par un scalaire).

1. a. \mathcal{S} est-il un sous-espace vectoriel de \mathcal{F}' ?
 b. Montrer qu'il existe dans \mathcal{S} une fonction polynôme du deuxième degré et une seule : préciser cet élément de \mathcal{S} .
2. a. Vérifier que si f et g sont des éléments de \mathcal{S} , alors leur différence $f - g$ est élément de \mathcal{S}_h , où \mathcal{S}_h désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(2) \quad y' - 2y = 0,$$

c'est-à-dire l'ensemble \mathcal{S}_h des fonctions h dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) - 2h(x) = 0.$$

- b. Prouver que \mathcal{S}_h est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , dont la fonction $h_1 : x \mapsto e^{2x}$ constitue une base.
 N.B. - On sera amené à poser $h = u \times h_1$ et montrer que $h \in \mathcal{S}_h$ si, et seulement si, u est une fonction constante.
3. En déduire que

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{F} : (\exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = me^{2x} - 4x^2)\}.$$

Partie B

On considère dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la famille des courbes représentatives des fonctions

$$f_m : x \mapsto me^{2x} - 4x^2 \text{ (où } m \text{ est un paramètre réel).}$$

1. Montrer que par tout point M du plan passe une courbe de la famille et une seule, et vérifier que pour une même abscisse x_0 l'ordonnée $f_m(x_0)$ du point de la courbe représentative de f_m est une fonction croissante de m .
 On désignera par C_m la courbe représentative de la fonction f_m (le paramètre réel m étant fixé), ou encore par $C_{[M]}$ la courbe de la famille passant par le point M .
2. a. Étudier les variations de la fonction

$$\varphi : x \mapsto 4xe^{-2x}$$

et construire sa courbe représentative

- b. En déduire, selon la valeur du paramètre m , les variations de la fonction f_m . (On sera amené à discuter le signe de $(m - \varphi(x))$).
3. a. Selon la valeur de m , la courbe C_m possède au plus deux points où la tangente est parallèle à l'axe (O, \vec{i}) ; montrer que lorsque m décrit \mathbb{R} l'ensemble des points ainsi obtenus est une parabole (P) dont on donnera une équation cartésienne et dont on indiquera le sommet S.

- b.** Montrer que la tangente à C_m en son point d'intersection avec l'axe (O, \vec{j}) passe par le point I de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
- 4. a.** Tracer sur un même graphique et avec soin, en prenant 4 cm pour unité de longueur,
- la parabole (P).
 - la courbe C_0 (correspondant à $m = 0$),
 - la courbe $C_{\frac{2}{e}}$ (dont on vérifiera qu'elle passe par le sommet S de (P)).
- b.** Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D_α d'équation $x = -\alpha$ (où α est un réel positif donné), la courbe C_0 , la courbe C_1 . et l'arc (OS) de la parabole (P).
Quelle est la limite de cette aire lorsque α tend vers $+\infty$?
- c.** Construire encore sur ce graphique la courbe $C_{[A]}$ passant par le point A de coordonnées $(1; 0)$.