

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Polynésie française juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans \mathbb{Z} :

$$493\lambda + 10 \equiv 2 \pmod{5}.$$

2. Soit $N = \overline{xyzt}$ un entier naturel écrit dans le système décimal, x étant non nul. Déterminer ce nombre sachant que les restes de la division de N par 17 et par 29 sont égaux à 10, et que les restes de la division de N par 5 et par 9 sont égaux à 2.

EXERCICE 2

4 points

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3e^x + 5}{e^x + 2}.$$

1. Étudier f .
2. Montrer que f est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .
3. On considère le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).
Calculer l'aire du domaine D limité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$, $y = \frac{5}{2}$ et la courbe \mathcal{C} d'équation $y = f(x)$.

PROBLÈME

12 points

Partie A

1. Pour tout (a, b) de \mathbb{R}^2 on pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a + 2b \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble \mathcal{M} des matrices $M(a, b)$ où (a, b) appartient à \mathbb{R}^2 .

- a. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, \mathcal{M} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . En déterminer une base. Quelle est la dimension de \mathcal{M} ?
 - b. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, \mathcal{M} a une structure de corps commutatif.
2. a. Montrer que $(1, 1 + 2i)$ est une base de \mathbb{C} , espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} . En déduire que tout nombre complexe peut se mettre de façon unique sous la forme $a + b(1 + 2i)$.

b. À tout nombre complexe z s'écrivant $a + b(1 + 2i)$ on associe la matrice $M(a, b)$ que l'on notera $\varphi(z)$.

Montrer que l'application φ de \mathbb{C} dans \mathcal{M} ainsi définie est un isomorphisme de \mathbb{C} muni de l'addition dans \mathcal{M} muni de l'addition.

c. Montrer que l'on a aussi

$$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \varphi(z, z') = \varphi(z)\varphi(z').$$

Quelle conclusion peut-on en tirer?

3. a. Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

b. De façon générale montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^*

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3} & \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3} \\ -\frac{5}{2} \sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé E rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit Ψ l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui laisse O invariant et qui a pour endomorphisme associé l'endomorphisme de matrice $\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soit A_0 le point de coordonnées $(1; 1)$ dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère la suite de points $A_1 = \Psi(A_0)$, et $(\forall n \in \mathbb{N}^*), A_n = \Psi(A_{n-1})$.

1. Déterminer les coordonnées x_n et y_n du point A_n .
2. Montrer que les suites x_n et y_n sont périodiques.
3. Déterminer l'isobarycentre des points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$.

Partie C

On considère dans \mathcal{E} l'application affine g définie par

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

On désigne par F son endomorphisme associé.

1. Pour tout réel λ on appelle E_λ l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $F(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. Montrer que E_λ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

2. Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles E_λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Déterminer une base de E_{λ_1} et une base de E_{λ_2} .
3. a. On considère $\vec{U} = 3\vec{\epsilon}_1 = \epsilon_2$ et $\vec{V} = \epsilon_2$. Montrer que (\vec{U}, \vec{V}) est une base de E . Est-elle orthonormée?
- b. Quelle est la matrice de F dans la base (\vec{U}, \vec{V}) ?
- c. Si un point M a pour coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $(O; \vec{U}, \vec{V})$, exprimer les coordonnées $(X'; Y')$ de $g(M)$ dans ce même repère en fonction de $(X; Y)$.
4. Soit p la projection affine sur la droite passant par O de vecteur directeur \vec{U} , de direction la droite vectorielle engendrée par \vec{V} .
Montrer que $(\forall M \in \mathcal{E}), \quad \overrightarrow{p(M)g(M)} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{p(M)M}$.
En déduire la construction de $g(M)$ connaissant M , la construction de M connaissant $g(M)$.
5. Représenter les points $g(A_0), g(A_1), \dots, g(A_5)$ puis les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2)$.