

∞ Baccalauréat C Polynésie juin 1984 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit A, B, C trois points non alignés du plan, et C' le point défini par $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$. On désigne par f l'application affine définie par :

$$f(A) = A \quad f(B) = B \quad f(C) = C'.$$

1. Montrer que l'application f est bijective. Déterminer l'ensemble des points invariants par f . Se peut-il que f soit une isométrie?
Montrer que toutes les droites parallèles à la droite (AB) sont globalement invariantes par f .
2. On désigne par G l'isobarycentre des points A, B et C et par G' l'image de G par f .
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GG'}$ en fonction du vecteur \overrightarrow{AB} .
Montrer que le point G' appartient à la droite (BC).
3. Soit M un point du plan. Donner une construction géométrique de son image M' par l'application f .

EXERCICE 2

5 POINTS

Soit $P(O; \vec{u}, \vec{v})$ le plan complexe et f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = 2z^2 - 2(\cos \theta + i \sin \theta)z - \sin \theta(\sin \theta - i \cos \theta)$$

où θ est un réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$.

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels et on appelle M l'image de z dans le plan P.

1. Calculer la partie réelle de $f(z)$ en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble Γ_θ des points M de P pour lesquels $f(z)$ est un imaginaire pur.
On montrera que Γ_θ est une conique dont on précisera la nature et le centre Ω_θ .
3. Quel est l'ensemble des points Ω_θ quand θ décrit $[0; 2\pi]$?
4. Représenter Γ_θ pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et préciser les éléments caractéristiques (foyers, directrices, ...).

PROBLÈME

5 POINTS

Aux notations près, les parties A, B et C sont largement indépendantes.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x), & \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

1. a. Montrer que la fonction φ définie sur I par :

$$\varphi(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$$

présente un maximum absolu en 0.

- b. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle I.
2. a. Montrer que f est continue et dérivable en 0 et que l'on a : $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
- b. Faire le tableau de variations de la fonction f (on utilisera la question 1.)
- c. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ représenter la courbe représentative (\mathcal{C}) , de la fonction f en prenant pour unité 4 cm.

Partie B

1. a. Montrer que l'équation $f(x) - x = 0$ admet une unique solution notée α .
- b. Donner un encadrement de α dans un intervalle de longueur 10^{-3} ?
2. On propose, dans cette question, de démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- a. On considère la fonction ψ définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\psi(x) = x - (x+1)\ln(x+1) + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

Calculer $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$ et en déduire le signe de $\psi(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- b. Montrer que $\psi(x)$ et $f'(x) + \frac{1}{2}$ sont de même signe.
- En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2} |u_n - u_{n-1}|$$

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$.

- b. Démontrer par récurrence que la suite $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- c. Démontrer en utilisant a. et b. que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite α défini au 1. a.

Partie C

Pour tout entier $p \geq 1$, on pose :

$$I_p = \int_p^{p+1} f(x) dx \quad \text{et} \quad S_p = \int_1^p f(x) dx.$$

1. a. Démontrer les inégalités :

$$\frac{\ln(p+2)}{p+1} \leq I_p \leq \frac{\ln(p+1)}{p}.$$

b. En déduire la limite de la suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ quand p tend vers plus l'infini.

2. a. Montrer que la suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b. Exprimer S_p en fonction des I_k .

c. Démontrer que S_p tend vers l'infini quand p tend vers plus l'infini.