Baccalauréat C Polynésie juin 1988

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Dans un plan P, on considère trois points A, B, C non alignés. On note I, J, K les milieux respectifs de [BC, [CA], [AB], et G l'isobarycentre de (A, B, C).
Pour tout point M du plan, on note P, Q et R les symétriques de M par rapport à I, J et K.
On se propose de prouver que les segments [AP], [BQ] et [CR] ont le même milieu, noté O, et que les points M, G et O sont alignés.

1. Placer les points et les segments précédents sur une figure.
2. Montrer qu'il existe une homothétie h_1 et une seule transformant A, B, C en I, J, K respectivement et déterminer cette homothétie.
3. Déterminer l'homothétie h_2 transformant (I, J, K) en (P, Q, R).
4. Préciser la nature de $f = h_2 \circ h_1$. Conclure.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B.
Sur la figure, on prendra 6 cm comme longueur du segment [AB].

1. Étudier et construire l'ensemble E des points M du plan MA tels que $\dfrac{\text{MA}}{\text{MB}} = 3$.
2. Étudier et construire l'ensemble E$'$ des points M du plan tels que
$\left(\overrightarrow{\text{MA}},\ \overrightarrow{\text{MB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ (modulo 2π).
3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et dont l'angle admet pour mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ et D le point tel que $\overrightarrow{\text{AD}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$.
On désigne par s la similitude directe transformant A en B et C en D.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de s.
   b. On note I le centre de la similitude s.
   Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{IA}},\ \overrightarrow{\text{IB}}\right)$.
   En déduire la position du point I et le placer sur la figure.
   c. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. (On ne demande pas de tracer ce cercle.)

PROBLÈME **11 POINTS**

Le problème a pour objectif d'étudier le comportement des primitives successives de la fonction logarithme. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm).

A. Étude d'un exemple

1. Soit f_0 la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f_0(x) = \ln x$.

a. Rappeler brièvement l'allure de la courbe représentative de cette fonction.

b. En effectuant une intégration par parties, calculer

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t.$$

c. Soit f_1 la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f_1(x) = x(\ln x - 1).$$

Montrer que f_1 est l'unique primitive de f_0 admettant 0 pour limite en 0.

2. Soit $f2$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f_2(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right).$$

a. Calculer la dérivée de f_2

b. Déterminer les limites de f_2 en 0 et en $+\infty$.

c. On prolonge f_2 par continuité en 0; montrer que la fonction g ainsi obtenue est dérivable en 0.

d. Dresser le tableau de variations de g.

e. Préciser la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g au point A d'abscisse 1. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de T. À cet effet, on précisera le signe de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = g(x) + x - \frac{1}{4}.$$

en étudiant sa dérivée h' et sa dérivée seconde h''.

f. Construire la courbe $\mathscr{C}$, la tangente T ainsi que les tangentes aux points où $\mathscr{C}$ rencontre (Ox).

B. Étude du cas général

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels, et, pour tout entier naturel n, la fonction φ_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi_n(x) = x^n\left[a_n \ln x - b_n\right].$$

1. On suppose que $\varphi_0(x) = \ln x$ (c'est-à-dire que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$) et que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\varphi'_{n+1} = \varphi_n$.

a. Expliciter les relations de récurrence reliant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n.

b. Calculer a_n.

c. On pose $\alpha_n = n!\,b_n$; calculer $\alpha_{n+1} - \alpha_n$, en déduire α_n.

d. Prouver finalement que, nécessairement, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!}\left[\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right] \qquad (1)$$

2. On définit désormais φ_n par la relation (1), pour $n \geqslant 1$.

a. Contrôler que φ_n satisfait aux conditions de la question 1.

b. Expliquer pourquoi $\varphi_1 = f_1$ et $\varphi_2 = f_2$.

c. Prouver que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}.$$

En déduire que

$$\ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln n + 1.$$

d. Montrer enfin que, sur $]0~;~+\infty[$, φ_n s'annule en un point x_n et un seul, et que $n \leqslant x_n \leqslant n\mathrm{e}$.