Baccalauréat C Polynésie juin 1989

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit un tétraèdre régulier ABCD, c'est-à-dire tel que AB = AC = AD = BC = BD = CD = a.

1. Soit A$'$ l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminer le réel m tel que le point G, milieu de [AA$'$], soit le barycentre du système $\{(\text{A},\ m),\ (\text{B},\ 1),\ (\text{C},\ 1),\ (\text{D},\ 1)\}$. Placer ces différents points sur une figure.
   Calculer GA^2 et GB^2 en fonction de a.
2. Déterminer l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que
$$6\text{MA}^2 + 2\text{MB}^2 + 2\text{MC}^2 + 2\text{MD}^2 = 5a^2.$$
3. Déterminer l'ensemble Π des points M de l'espace tels que
$$\text{MB}^2 + \text{MC}^2 + \text{MD}^2 - 3\text{MA}^2 = a^2.$$
   Vérifier que Π est le plan médiateur de [AA$'$].
4. Déterminer l'intersection Γ de Σ et Π et prouver que les milieux I, J, K des segments [AB], [AC], [AD] appartiennent à Γ. Placer Γ sur la figure.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC. On se propose de construire un triangle A$'$B$'$C$'$ satisfaisant aux conditions suivantes :
(1) A$'$ $\in$ (BC), B$'$ $\in$ (CA), C$'$ $\in$ (AB) ;
(2) (A$'$B$'$) est orthogonale à (CA), (B$'$C$'$) est orthogonale à (AB), (C$'$A$'$) est orthogonale à (BC).

À cet effet, on considère les droites perpendiculaires en A à (CA), en B à (AB) et en C à (BC), qui se coupent en A_1, B_1 et C_1 (A est situé sur (A_1B_1), B sur (B_1C_1) et C sur (C_1A_1).
Soit s la similitude directe qui transforme A_1 en C et B_1 en A.

1. *Étude de* s.
   a. Placer les triangles ABC et $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1$ sur une figure (pour cette figure, on prendra AB = 6 cm, $\left(\overrightarrow{\text{BC}},\ \overrightarrow{\text{BA}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et BC = 5 cm).
   b. Montrer que l'angle de la similitude s a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$.
   c. Démontrer que le centre O de s appartient aux cercles de diamètres $[\text{AB}_1]$ et $[\text{CA}_1]$. Placer O sur la figure.
   d. Déterminer les images par s des droites (C_1A_1) et (B_1C_1).
   En déduire l'image de C_1 par s. Prouver enfin que le cercle de diamètre [BC] passe par O.
2. *Construction du triangle* A$'$B$'$C$'$
   a. Prouver que $h = s \circ s$ est une homothétie.

b. Soit A′, B′, C′ les images des points A_1B_1 et C_1 par h.
Montrer que A′ appartient aux droites (OA_1) et (BC).

c. Montrer enfin que le triangle A′B′C′ satisfait aux conditions (1) et (2) et placer ce triangle sur la figure.

PROBLÈME **10 POINTS**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. *Étude d'une fonction auxiliaire*
Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$g(t) = 1 - t - e^{-2t}.$$

   a. Étudier les variations de g et déterminer la limite de g en $+\infty$ (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).

   b. Démontrer qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que $g(a) = 0$ et prouver que $\dfrac{\ln 2}{2} < a < 1$.

   c. Étudier le signe de $g(t)$.

   d. Établir que $0,79 \leqslant a \leqslant 0,8$.

2. Variations de f.

   a. Justifier la dérivabilité de f sur $]0~;~+\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right).$$

   b. En déduire les variations de f.

3. *Limite de f en 0*

   a. Montrer que pour tout $x > 0$

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right).$$

   b. En déduire la limite de f en 0.

4. *Étude de f en $+\infty$*

   a. Établir que pour tout élément t de $[0; 1]$

$$0 \leqslant e^{t} \leqslant 1 + u + \frac{e}{2}u^2.$$

b. En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout élément u de $[0\,;\,1]$

$$1+u \leqslant \mathrm{e}^{u} \leqslant 1+u+\frac{\mathrm{e}}{2}u^2.$$

c. Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \geqslant 2$

$$0 \leqslant [f(x)]^2 - 2x \leqslant 2\mathrm{e}.$$

d. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = \sqrt{2x}$.
Déterminer le signe de $f-\varphi$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats en introduisant la courbe représentative Γ de φ.

5. Dresser le tableau de variation de f et tracer les courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

6. Soit T la transformation du plan complexe dans lui-même qui, à tout point m d'affixe w, distinct de 0 et n'appartenant pas au cercle de centre O et de rayon 1, associe le point M d'affixe

$$z = \frac{\overline{w}}{\ln |w|}.$$

a. Exprimer les parties réelle et imaginaire x et y de z en fonction des parties réelle et imaginaire s et t de w.

b. En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble E des points $M = T(m)$, lorsque m parcourt la droite d'équation $s = 1$, privée du point d'affixe 1.

c. Prouver enfin que E est la réunion de la courbe $\mathscr{C}$ et d'une courbe $\mathscr{C}_1$ obtenue à partir de $\mathscr{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.