

∞ Baccalauréat C Polynésie septembre 1997 ∞

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE

6 POINTS

Partie A

Soient, dans l'espace E, quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$.
2. On suppose que ABCD est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = BD.$$

3. On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Montrer que pour tout point M de E,

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2.$$

Déterminer l'ensemble (Σ) des points M de l'espace E tels que

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2.$$

Partie B

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes ABCD et A'B'C'D' ainsi que les milieux I, J, K et L de [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'] respectivement.

1. Montrer que L est barycentre des points I, J et K affectés de coefficients que l'on précisera.
En déduire que IJKL est un parallélogramme.
2. Soient O, Q et P les centres respectifs des parallélogrammes IJKL, ABCD et A'B'C'D'.
Montrer que O est le milieu de [PQ].

EXERCICE 1 SPÉCIALITÉ

6 POINTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0 .

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par

$$z_n = a^n z_0.$$

Partie A

1. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.

Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

3. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7 .

Partie B

Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

1. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $r_n = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

2. En déduire que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3. Déterminer la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p})$.

PROBLÈME

10 POINTS

Le but du problème est l'étude d'une fonction f , d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 5$ cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative.

1. Montrer que f est paire. Étudier ses variations sur $[0; +\infty[$ et déterminer sa limite en $-\infty$. Tracer sa courbe (\mathcal{C}) .

2. Montrer que f établit une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]0; 1]$. On note y un réel quelconque de l'intervalle $]0; 1]$.

Exprimer en fonction de y le seul réel positif x vérifiant $f(x) = y$.

Partie B

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

(On admettra que, pour tout réel x , $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.)

1. Calculer $F'(x)$. En déduire que F est la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.
2.
 - a. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
 - b. Montrer que F est impaire.
 - c. En déduire la limite de F en $-\infty$.
3. Soit λ un réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan constituée des points $M(x; y)$ tels que $\lambda \leq x \leq 2\lambda$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ ; donner la valeur exacte de $\mathcal{A}(\lambda)$ et déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie C

On pose $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. Calculer u_0 .
Calculer u_3 à l'aide d'une intégration par parties.
(Remarquer que $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).
2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.
3. En intégrant cette double inégalité sur $[0; 1]$, montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.