

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2008 œ

EXERCICE 1

4 points

On rappelle que la probabilité d'un évènement  $A$  sachant que l'évènement  $B$  est réalisé se note  $p_B(A)$ .

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute  $n$  boules blanches supplémentaires.
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute  $n$  boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

- $B_1$  l'évènement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- $B_2$  l'évènement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- $A$  l'évènement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend  $n = 10$ .

- Calculer la probabilité  $p(B_1 \cap B_2)$  et montrer que  $p(B_2) = \frac{3}{4}$ .
- Calculer  $p_{B_2}(B_1)$ .
- Montrer que  $p(A) = \frac{3}{10}$ .

2. On prend toujours  $n = 10$ .

Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'évènement  $A$ .

- Déterminer  $p(X = 3)$ . (On donnera la réponse à  $10^{-2}$  près).
- Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ .

3. Dans cette question  $n$  est un entier supérieur ou égal à 1.

Existe-t-il une valeur de  $n$  pour laquelle  $p(A) = \frac{1}{4}$  ?

EXERCICE 2

5 points

On donne la propriété suivante :

« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé :

les points I et J tels que  $\vec{BI} = \frac{2}{3}\vec{BC}$  et  $\vec{EJ} = \frac{2}{3}\vec{EH}$ .  
le milieu K de [IJ].

On appelle  $P$  le projeté orthogonal de  $G$  sur le plan  $(FIJ)$ .

### Partie A

1. Démontrer que le triangle  $FIJ$  est isocèle en  $F$ .  
En déduire que les droites  $(FK)$  et  $(IJ)$  sont orthogonales.  
On admet que les droites  $(GK)$  et  $(IJ)$  sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(FGK)$ .
3. Démontrer que la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(FGP)$ .
4. a. Montrer que les points  $F, G, K$  et  $P$  sont coplanaires.  
b. En déduire que les points  $F, P$  et  $K$  sont alignés.

### Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

On appelle  $N$  le point d'intersection de la droite  $(GP)$  et du plan  $(ADB)$ .

On note  $(x; y; 0)$  les coordonnées du point  $N$ .

1. Donner les coordonnées des points  $F, G, I$  et  $J$ .
2. a. Montrer que la droite  $(GN)$  est orthogonale aux droites  $(FI)$  et  $(FJ)$ .  
b. Exprimer les produits scalaires  $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ}$  en fonction de  $x$  et  $y$ .  
c. Déterminer les coordonnées du point  $N$ .
3. Placer alors le point  $P$  sur la figure en annexe.

### EXERCICE 3

5 points

**Les parties A et B sont indépendantes.**

### Partie A

On considère l'ensemble  $(E)$  des suites  $(x_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}.$$

1. On considère un réel  $\lambda$  non nul et on définit sur  $\mathbb{N}$  la suite  $(t_n)$  par  $t_n = \lambda^n$ .  
Démontrer que la suite  $(t_n)$  appartient à l'ensemble  $(E)$  si et seulement si  $\lambda$  est solution de l'équation  $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$ .  
En déduire les suites  $(t_n)$  appartenant à l'ensemble  $(E)$ .  
On admet que  $(E)$  est l'ensemble des suites  $(u_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par une relation de la forme :

$$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

2. On considère une suite  $(u_n)$  de l'ensemble  $(E)$ .  
Déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $u_0 = 6$  et  $u_1 = 6,6$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$ .

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Partie B**

On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$ .
  - a. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 8]$ .
  - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$ .
2. En déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente et déterminer sa limite  $\ell$ .

**EXERCICE 4**

**6 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}).$$

La courbe  $(\mathcal{C})$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

**Partie A - Étude de fonction  $f$ .**

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$ .  
On admet que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et montrer que la droite (d) d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$ .  
Étudier la position relative de  $(\mathcal{C})$  et de (d).
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et montrer que la droite (d') d'équation  $y = -x + \ln 2$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$ .
4. Étudier les variations de la fonction  $f$ .  
Montrer que le minimum de la fonction  $f$  est égal à  $\frac{3}{2} \ln 2$ .
5. Tracer les droites (d) et (d') sur la feuille annexe.

**Partie B - Encadrement d'une intégrale.**

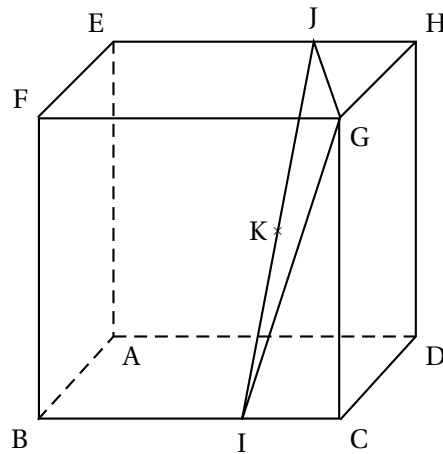
On pose  $I = \int_2^3 [f(x) - x] dx$ .

1. Donner une interprétation géométrique de  $I$ .
2. Montrer que, pour tout  $X \in [0; +\infty[$ ,  $\ln(1 + X) \leq X$ .
3. En déduire que  $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$  et donner un encadrement de  $I$  d'amplitude  $0,02$ .

## Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

## EXERCICE 2



## EXERCICE 4

