

**↻ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ↻**  
**septembre 2011**

**EXERCICE 1**

**5 points**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1<sup>er</sup> niveau, 75 vont au 2<sup>e</sup> niveau et 100 vont au 3<sup>e</sup> niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2<sup>e</sup> niveau, les autres vont au 1<sup>er</sup> niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

- $N_1$  : « La personne va au premier niveau. »
- $N_2$  : « La personne va au deuxième niveau. »
- $N_3$  : « La personne va au troisième niveau. »
- $E$  : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne aille au 2<sup>e</sup> niveau par l'escalier est égale à  $\frac{1}{12}$ .  
**b.** Montrer que les évènements  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont équiprobables.  
**c.** Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2<sup>e</sup> niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.  
On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2<sup>e</sup> niveau.  
**a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .  
**b.** Déterminer, à  $10^{-4}$  près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2<sup>e</sup> niveau.  
**c.** En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2<sup>e</sup> niveau ?
4. Soit  $n$  un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais  $n$  personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. Déterminer le plus petit entier  $n$  strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2<sup>e</sup> niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

**EXERCICE 2**

**4 points**

**Partie A**

On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace,  $EF^2 = \overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EF}$ .  
Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout point  $M$  de l'espace, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points  $M$  de l'espace tels que

$$MA^2 + MB^2 = AB^2.$$

### Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :  $3x + 4y + z - 1 = 0$  et  $x - 2y - z + 5 = 0$  et les points A et B de coordonnées respectives  $(-1 ; 0 ; 4)$  et  $(3 ; -4 ; 2)$ .

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.

On nomme  $(\Delta)$  la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

- Montrer que le point A appartient à la droite  $(\Delta)$ .
- Montrer que  $\vec{u}(1 ; -2 ; 5)$  est un vecteur directeur de la droite  $(\Delta)$ .
- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite  $(\Delta)$ .

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit (E) l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $MA^2 + MB^2 = AB^2$ .

Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite  $(\Delta)$ . On précisera les coordonnées de ces points.

### EXERCICE 3

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $z_A = 2 - 3i$ ,  $z_B = i$  et  $z_C = 6 - i$ .

On réalisera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

#### Partie A

- Calculer  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ .
- En déduire la nature du triangle ABC.

#### Partie B

On considère l'application  $f$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  distincte de  $i$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

- Soit D le point d'affixe  $z_D = 1 - i$ . Déterminer l'affixe du point D' image du point D par  $f$ .

2. **a.** Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application  $f$  est le point d'affixe  $2i$ .
- b.** Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3. Démontrer que, pour tout point  $M$  distinct du point B,  $OM' = \frac{AM}{BM}$ .
4. Démontrer que, pour tout point  $M$  distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5. Démontrer que si le point  $M$  appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point  $M'$  appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que si le point  $M'$  appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point  $M$  appartient à la droite (AB).

**EXERCICE 4****6 points****Partie A Question de cours**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions continues, dérivables sur  $I$  telles que les fonctions dérivées  $u'$  et  $v'$  soient continues sur  $I$ .

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle  $[a; b]$  de  $I$ .

**Partie B**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

On note respectivement  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  les courbes représentatives de  $f$  de  $g$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Les courbes sont tracées en annexe.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points communs à  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .
- b.** Donner les positions relatives de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. **a.** À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- b.** Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

**Partie C**

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x} dx.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout  $x$  de  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$0 \leq (x-1)^{2n} e^{-x} \leq (x-1)^{2n}.$$

**b.** Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}.$$

**2.** En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

## ANNEXE

## EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie

