Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2010

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

Proposition 2 : Si les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Proposition 3 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2+4\text{i}$, $b = -4+2\text{i}$, $s = -5+5\text{i}$ et $\omega = -2+2\text{i}$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. **a.** Déterminer l'écriture complexe de h.
   b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4+2\text{i}$ et que le point D a pour affixe $d = -2-4\text{i}$.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].

4. Soit P le milieu du segment [AC].
   a. Déterminer l'affixe p du point P.
   b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}\text{i}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{BD}}\ ;\ \overrightarrow{\text{P}\Omega}\right)$.
5. Soit Q le milieu du segment [BD].
   Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement N.
   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$.On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?
2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

   Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
   S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
   S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

   On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
   c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
   Déterminer m pour que le jeu soit équitable.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à $0,999$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \text{e}^x - x\text{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0~;~+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $\text{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\text{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0~;~+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\text{e}^x + 1}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée en annexe.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x~;~f(x))$,

P le point de coordonnées $(x~;~0)$,

Q le point de coordonnées $(0~;~f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4