

∞ Baccalauréat C Polynésie juin 1977 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit l'espace linéaire p de \mathbb{P} , espace vectoriel réel, dans lui-même de matrice A relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) donnée par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= a\vec{i} + d\vec{j} \\ f(\vec{j}) &= b\vec{i} + c\vec{j} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont quatre nombres entiers strictement positifs.

Sachant que a, b, c, d sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , q étant strictement supérieur à 1 et premier avec a , déterminer la matrice A pour que son déterminant soit égal à $-9a^3$.

EXERCICE 2

5 POINTS

Soit V un espace vectoriel euclidien de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée et E un espace affine associé à V muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère f l'application affine de E dans E définie par :

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \\ z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ de V associé à f conserve la norme.
2. Montrer que φ est involutif et caractériser φ .
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et préciser si f est involutive.
4. Soit s l'application affine d'endomorphisme associé φ et telle que $s(O) = O$.
 - a. Caractériser s .
 - b. Préciser l'endomorphisme associé à $f \circ s$, en déduire la nature de $t = f \circ s$ et montrer que f est la composée de deux applications que l'on précisera.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

On considère la fonction φ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \text{Log}(1+x)$$

(où Log est le logarithme népérien).

1. Montrer que φ est une fonction décroissante sur \mathbb{R}_+ , dont on donnera l'image $\varphi(\mathbb{R}_+)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$, pour tout $x \geq 0$.
2. Étudier la branche infinie (on utilisera l'égalité $1 + x = x \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$ pour $x > 0$) et tracer la courbe représentative (C) , dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité choisie : 2 cm).

Partie B

On considère maintenant que (P) est un plan affine euclidien et que le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé. Soit le mouvement d'un point M de (P) dont les coordonnées sont données par

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 - \frac{1}{t} - \text{Log } t \end{cases} \text{ avec } t \geq 1.$$

t désignant le temps.

1. Trouver la trajectoire (C') du point M (on précisera le sens de parcours).
2. Déterminer $(H) = \{m \in (P) \mid \overrightarrow{Om} = \overrightarrow{V}(t)\}$, $\overrightarrow{V}(t)$ désignant le vecteur-vitesse de M à l'instant t .
3. Déterminer dans quels intervalles de temps le mouvement est accéléré, retardé. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les vecteurs-vitesse et accélération à la date $t = 1$.

Partie C

On considère maintenant la fonction f définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , définie par

$$f(x) = e^{-x} \text{Log}(1 + e^x).$$

Soit (C'') la courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$. Que peut-on dire alors de (C'') ?
2. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\varphi(e^x)$. En déduire le sens de variation de la fonction f .
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de $u = e^x$. En déduire la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$?
4. En utilisant l'égalité $1 + e^x = e^x (e^{-x} + 1)$, trouver la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Tracer (C'') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).
On donne $\text{Log } 3,72 \approx 1,31$ et $\text{Log } 8,39 \approx 2,12$.
6. Soit l'intégrale $F(a) = \int_0^a f(x) dx$.
 - a. Montrer qu'il existe des réels b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^x}{1 + e^x} = b + \frac{c}{1 + e^x}.$$

Au moyen d'une intégration par parties, ramener le calcul de $F(a)$ au calcul de l'intégrale $\int_0^a \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

En déduire $F(a)$.

- b.** $a > 0$. Que représente $F(a)$? Étudier l'existence et donner s'il y a lieu, la valeur de $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a)$.
- c.** $a < 0$. Que représente $F(a) - a$? Étudier l'existence et donner s'il y a lieu, la valeur de $\lim_{a \rightarrow -\infty} (F(a) - a)$.

Partie D

On considère les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui vérifient la relation

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

1. Montrer que la fonction f définie au C vérifie (1).
2. On considère les fonctions f vérifiant (1) de la forme $f(x) = e^{-x}g(x)$. Trouver la relation (2) vérifiée par les fonctions g . Quelle est l'expression des fonctions g ?
3. En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant (1).