

♪ Baccalauréat S Polynésie juin 2007 ♪

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'évènement contraire d'un évènement E sera noté \bar{E} . La probabilité d'un évènement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} , près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 €;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
 - a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
 - b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur?

EXERCICE 2

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra 1 cm pour unité graphique. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation :

$$\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0, \bar{z} \text{ étant le conjugué de } z.$$

2. On considère le point A d'affixe $4 - 2i$.

Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit D le point d'affixe $2i$.

- a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que :

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

- b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$, θ appartenant à \mathbb{R} .

4. À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-1}{z+2}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que

$$|z'| = 1.$$

Exercice 3

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A $(1; 3; 2)$, B $(4; 6; -4)$ et le cône (Γ) d'axe (O, \vec{k}) , de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

- a. Déterminer une équation de (P).

- b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ) .

3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q).

Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

- deux droites parallèles;
- deux droites sécantes;
- une parabole;
- une hyperbole;
- un cercle.

Partie B

Soient x , y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x; y; z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

- a. Résoudre l'équation (E).
 - b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x; y; z)$ où x , y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.
- b. Montrer que si M est un point de (C_2) , intersection de (Γ) et de (Q) , alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
 - c. Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
 - d. Déterminer un point de (C_2) , distinct de A , dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

EXERCICE 3**5 points****Enseignement obligatoire**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A\left(\frac{2}{3}; -3; 2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}; 0; -4\right)$.

On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(B; 1)$.
 - a. Calculer les coordonnées de E .
 - b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = 3\|\vec{MO}\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.
 - c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.
2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P) .
En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.
 - b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$.
En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; 4\sqrt{3} - 1\right)$.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID) .
 - b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE 4**6 points**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x \ln x.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire \mathcal{A} du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f , et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée en annexe.

1.
 - a. Montrer que f est positive sur $[1; 2]$.
 - b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2 \ln 2$.
 - c. Soit E le point d'abscisse $\frac{4}{e}$.
Montrer que, sur l'intervalle $[1; 2]$, le point E est l'unique point de \mathcal{C}_f en lequel la tangente à \mathcal{C}_f est parallèle à (MN).
 - d. On appelle T la tangente à \mathcal{C}_f au point E.
Montrer qu'une équation de T est : $y = (2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$.
2. Soit g la fonction définie sur $[1; 2]$ par : $g(x) = f(x) - \left[(2 \ln 2)x - \frac{4}{e} + 1 \right]$.
 - a. Montrer que pour tout x de $[1; 2]$: $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.
 - b. Étudier les variations de g sur $[1; 2]$ et en déduire la position relative de \mathcal{C}_f et de la tangente T sur cet intervalle.
3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. On admet que la courbe \mathcal{C}_f reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1; 2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.
 - a. Calculer les aires des trapèzes MNQP et $M'N'QP$.
 - b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de \mathcal{A} d'amplitude 10^{-1} .

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de \mathcal{A} .

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x \ln x \, dx$.
2. En déduire la valeur exacte de \mathcal{A} .

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie

