Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 2005 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en B avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{3}$;
  soit en C avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en C, soit en A de façon équiprobable
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement $B_n,\ C_n$) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement $b_n,\ c_n$) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement $B_n,\ C_n$).
On a donc : $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0$.
Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer $a_k,\ \ b_k$ et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}a_n \end{array}\right.$$
   b. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ a_{n+2} = \dfrac{1}{6}a_n$.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel p,
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p \end{array}\right. .$$
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.
   On admet que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **7 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.
2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).
   a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
   b. Tracer $\mathscr{H}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
   On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3.
   On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan constitué des points $M(x\ ;\ y)$ vérifiant :
   $$-3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } \sqrt{x^2+16} \leqslant y \leqslant 5.$$
   Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ et exprimer l'aire de $\mathscr{D}$ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. **a.** Donner l'écriture complexe de r.
   b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x\ ;\ y)$ du plan.
   Vérifier que $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{array}\right.$
   Déterminer les coordonnées des points A′ et B′, images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A′ et B′ dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
2. Soit $\mathscr{H}'$ l'hyperbole d'équation $xy = 8$.
   a. Tracer $\mathscr{H}'$ dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
   b. Montrer que $\mathscr{H}'$ est l'image de $\mathscr{H}$ par la rotation r.
3. Soit $\mathscr{D}'$ l'image de $\mathscr{D}$ par la rotation r. On admet que $\mathscr{D}'$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x} \leqslant y \leqslant 5\sqrt{2} - x$.
   a. Hachurer $\mathscr{D}'$.
   b. Calculer l'aire de $\mathscr{D}'$,exprimée en cm^2.
   En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de $\mathscr{D}$.

EXERCICE 3 **3 points**

Pour chacune des 3 *questions, une seule des trois propositions est exacte.*
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre A$(-2\ ;\ 5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a. $|z-2+5\text{i}|^2 = 3$;

b. $|z+2-5\text{i}|^2 = 3$;

c. $|z-2+5\text{i}| = 3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;

c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4i, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $|z_G-3-2,5\text{i}| = \dfrac{5}{6}$;

b. $z_G-(1+\text{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\text{i})$;

c. $z_G-(3+2,5\text{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\text{i})$.

EXERCICE 4 — 5 points

L'annexe se rapporte à cet exercice.
Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ de l'annexe. On considère également la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \text{e}^{-x}$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$-\text{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \text{e}^{-x}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathcal{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right].$$

b. En déduire que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.

Annexe : exercice 4