Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Pondichéry avril 1975 ∾

EXERCICE 1

Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2\mathrm{i}z - 2 = 0$$

On désigne par z' la racine dont la partie réelle est positive et par z'' l'autre racine.

Calculer $\left(\dfrac{z'}{z''}\right)^{2n}$ où n est un entier relatif.

EXERCICE 2

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle ainsi définie

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & x(\text{Log}\, x)^3 \end{array}\right.$$

pour tout x strictement positif.

a. Démontrer que la fonction f est continue au point 0. Est-elle dérivable au point 0 ?

b. Étudier la variation de f.

Étudier f aux bornes de son domaine de définition.

Tracer la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_a^1 x(\text{Log}\, x)^n \,\mathrm{d}x$ avec $a \in]0 ; 1[; n \in \mathbb{N}^\star$.

a. Calculer I_1.

b. Calculer I_n en fonction de I_{n-1} lorsque n est au moins égal à 2.

c. Calculer I_2 et I_3. Que représente $|I_3|$?

PROBLÈME

Première partie

Le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ étant rapporté à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on définit l'application linéaire ϕ de $\overrightarrow{P}$ dans $\overrightarrow{P}$ par la matrice :

$$M_\phi = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$$

où a et b représentent des paramètres réels quelconques.

1. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le noyau de φ soit distinct de $\{0\}$?
Cette relation étant supposée vérifiée déterminer le noyau et l'image de φ.
Démontrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires et reconnaître ϕ.
2. On suppose ici que le noyau de φ est égal à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Caractériser les applications ϕ qui sont involutives; démontrer que les automorphismes ainsi obtenus sont tous, sauf l'un d'eux, des symétries vectorielles que l'on notera s_a et dont on déterminera, en fonction de a, la direction $\overrightarrow{\Delta}$ et l'axe $\overrightarrow{D}$.
On appellera σ_a la symétrie vectorielle d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et de direction $\overrightarrow{D}$; déterminer pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{P}$ une relation entre $s_{\text{A}}\left(\overrightarrow{v}\right)$ et $\sigma_{\text{A}}\left(\overrightarrow{v}\right)$. En déduire, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, la matrice de σ_a. Déterminer $s_a \circ \sigma_a$ et $\sigma_a \circ s_a$.
3. La base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ étant supposée orthonormée, l'application ϕ peut-elle être une isométrie positive? Une isométrie négative? Dans l'affirmative, préciser l'isométrie obtenue.

Deuxième partie

On considère le plan affine $\mathscr{P}$ associé au plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ et rapporté au repère $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On considère les deux applications f et g de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, qui au point M de coordonnées x et y, associent respectivement les points $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$ dont les coordonnées sont :

$$\text{pour } M_1 \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2x+3y+2 \\ y_1 & & -x-2y- \end{array}\right.$$

$$\text{pour } M_2 \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & -2x-3y \\ y_2 & = & x+2y \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f et g sont des applications affines de $\mathscr{P}$; écrire les matrices des endomorphismes associés dans $\overrightarrow{P}$.
2. En utilisant 1. b., déterminer entièrement f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. On donne trois points de $\mathscr{P}$ par leurs coordonnées A(4 ; −2) ; B(2 ; −2) ; C(−2 ; 0).
On note E l'ensemble de points : $E = \{\text{O, A, B, C}\}$ et F l'ensemble d'applications (où I est l'identité de $\mathscr{P}$) :

$$F = \{I,\ f,\ g,\ f \circ g\}.$$

Démontrer que $(F, \circ)$ est un groupe laissant E invariant.