Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry avril 1982

EXERCICE 1

On considère le nombre A qui s'écrit dans le système décimal : $A = \overline{xyxyxyxyx5}$, x et y étant des chiffres de ce système, x étant non nul.

1. À quelle condition ce nombre est-il divisible par 25 ?
2. Déterminer les différentes valeurs de A, telles que A soit divisible par 225.
3. On considère le nombre $B = \overline{xyxyxy}$ toujours écrit dans le système décimal avec x et y qui sont des chiffres, x étant non nul. Déterminer B tel que B soit divisible par 225.

EXERCICE 2

1. Soit φ la fonction numérique définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = 1 + \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t.$$

Étudier les variations de φ. En déduire le signe $\varphi(t)$ suivant les valeurs de t.

2. On définit la fonction numérique f par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f(x) = \frac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

   a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

   b. Étudier les variations de f.

Montrer que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f $\left(\text{on pourra poser } t = \dfrac{1}{x}\right)$.
Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 6 cm (on admettra que la courbe est au-dessus de l'asymptote).

PROBLÈME

Notations : E est un espace affine, $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est son espace vectoriel associé. f_1 et f_2 sont deux applications affines de E dans E ; $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ sont les endomorphismes associés respectivement à f_1 et f_2.
Pour tout point M de E, on notera M_1 le point $f_1(M)$ et M_2 le point $f_2(M)$.
Étant donné deux réels α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, on étudie dans la suite du problème l'application f (qui dépend de f_1, f_2, α_1, α_2 qui à tout point M de E associe le point $f(M)$, barycentre de M_1 affecté du coefficient α_1 et de M_2 affecté du coefficient α_2. On notera M' l'image par f du point M.

Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, $\overrightarrow{\mathrm{V_1}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{V_2}}$ sont deux éléments de E, f_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V_1}}$ et f_2 est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V_2}}$.
Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{\alpha_1 \mathrm{V}_1} + \overrightarrow{\alpha_2 \mathrm{V}_2}$.
2. Dans cette question, E est un plan affine, D est une droite affine de E, D$'$ est une droite vectorielle de E distincte de la direction de D, $f_1 = \mathrm{Id_E}$ et f_2 est la projection affine sur D de direction D$'$.
   a. Montrer que les points de D sont invariants par f.
   b. Exprimer $\overrightarrow{M_2M'}$, en fonction de α_1 et de $\overrightarrow{M_2M}$. Dessiner l'image M' d'un point M par f dans le cas où $\alpha_1 = 2$. Quelle est l'application f dans le cas où $\alpha_1 = -1$?

Partie B

1. Soit O un point de E. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}'M'} = \overrightarrow{\alpha_1 f_1\,(\mathrm{O}M)} + \overrightarrow{\alpha_2 f_2\,(\mathrm{O}M)}$$

pour tout point M de E (on rappelle que M' désigne $f(M)$ et O$'$ désigne $f(\mathrm{O})$. En déduire que f est une application affine, préciser son endomorphisme associé.
2. Si f_1 et f_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2, quelle est la nature de f (discuter) ?
3. Dans cette question E est un plan affine.
   a. (A, B, C, D) est un parallélogramme de E $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)$, g est une application affine. Montrer que (g(A), g(B), g(C), g(D) est un parallélogramme (éventuellement aplati) :
   b. Soit $(\mathrm{A_1, B_1, C_1, D_1})$, $(\mathrm{A_2, B_2, C_2, D_2})$ deux parallélogrammes $\left(\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} = \overrightarrow{\mathrm{D_1C_1}},\ \overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{D_2C_2}}\right)\right.$.
   (On suppose que $(\mathrm{A_1, B_1C_1D_1})$ n'est pas aplati), montrer qu'il existe une application affine notée f_2 telle que

$$f_2(\mathrm{A_1}) = \mathrm{A_2},\ f_2(\mathrm{B_1}) = \mathrm{B_2},\ f_2(\mathrm{C_1}) = \mathrm{C_2},\ f_2(\mathrm{D_1}) = \mathrm{D_2}.$$

   c. Soit A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ les barycentres respectifs de $(\mathrm{A_1},\ \alpha_1)$ et $(\mathrm{A_2},\ \alpha_2)$, $(\mathrm{B_1},\ \alpha_1)$ et $(\mathrm{B_2},\ \alpha_2)$, $(\mathrm{C_1},\ \alpha_1)$ et $(\mathrm{C_2},\ \alpha_2)$, $(\mathrm{D_1},\ \alpha_1)$, $(\mathrm{D_2},\ \alpha_2)$.
   Montrer que $\left(\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{D}'\right)$ est un parallélogramme.

Partie C

Dans ce paragraphe E est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_1}\right)$. À tout point M de E on associe son affixe z.

1. Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes de E. Montrer que f est soit une similitude directe, soit une application constante (on pourra utiliser les nombres complexes).

2. f_1 et f_2 sont deux similitudes directes de même rapport $k/ : (k > 0)$, de même angle θ, de centres respectifs A_1 et A_2. Montrer que f est la similitude directe de rapport k, d'angle θ et de centre A barycentre de $(A_1,\ \alpha_1)$ et $(A_2,\ \alpha_2)$.

3. **a.** Soit un carré (A, B, C, D) $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right)$ et g une similitude directe. Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un carré tel que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{g(A)g(B)},\ \overrightarrow{g(A)g(D)}}\right).$$

b. $(A_1\ B_1\ C_1, D_1)$ et $(A_2, B_2\ C_2, D_2)$ sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}, \quad \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$$

et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1},\ \overrightarrow{A_1D_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2},\ \overrightarrow{A_2D_2}}\right).$$

Montrer qu'il existe une similitude directe f_2 telle que

$$A_2 = f_2\left(A_1\right), B_2 = f_2\left(B_1\right), C_2 = f_2\left(C_1\right), D_2 = f_2\left(D_1\right).$$

A', B', C', D', étant définis comme dans B 3. c. montrer que (A', B', C', D') est un carré, éventuellement réduit à un point.

N. B. - Pour a. et b. l'usage des nombres complexes est déconseillé.

4. On se donne trois points A_1, A_2 B distincts.

M_1 décrit le cercle de centre A_1 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1M_1}}\right) = \omega t \quad (\omega \neq 0)$.

M_2 décrit le cercle de centre A_2 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_2B}, \overrightarrow{A_2M_2}}\right) = \omega t$.

M' est le barycentre de $(M_1,\ \alpha_1)$ et $(M_2,\ \alpha_2)$.

Quel est le mouvement de M' (utiliser la question C 2.) ?