Baccalauréat C Pondichéry mai 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit B un entier naturel non nul.
Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base B.

1. Montrer que $\overline{132}$ est divisible par $B+1$ et $B+2$.
   Pour quelles valeurs de B, $\overline{132}$ est-il divisible par six ?
2. Montrer que $A = \overline{1320}$ est divisible par six.
3. On pose $C = \overline{1430}$. Quelle est le p. g. c. d. de A et C ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

A, B, C sont trois points non alignés d'un plan affine P et P$'$ le plan P privé de la droite AB.

1. Soit E l'ensemble des couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $a+b+1 \neq 0$.
   Démontrer que l'application f qui à tout élément $(a,\ b)$ de E associe le barycentre G de (A, a), (H, b), (C, 1) est une bijection de E sur P$'$.
2. On considère l'application g de P$'$ dans P$'$ qui au point G associe le point G$'$ barycentre de (A, b), (B, a), (C, 1).
   a. Déterminer l'ensemble des points invariants par g.
   b. Démontrer que $\overrightarrow{\text{GG}'}$ appartient à une direction indépendante de G.
   c. Démontrer que le milieu de (G, G$'$) est sur une droite fixe et en déduire la nature de g.

PROBLÈME **13 POINTS**

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition des applications, et du produit d'une application par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie A

On note e_1 et e_2 les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$e_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin x \quad \text{et} \quad e_2(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos x,$$

et on appelle $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}$ engendré par e_1 et e_2.

1. Démontrer que $(e_1,\ e_2)$ est une base de $\mathscr{F}$.
   a. Démontrer que tout élément f de $\mathscr{F}$ est dérivable, et que sa dérivée f' appartient à $\mathscr{F}$.
   b. Écrire la matrice dans la base $(e_1,\ e_2)$ de l'endomorphisme D de $\mathscr{F}$, qui à f associe f'.
   Établir que D est bijective, et définir l'application réciproque D^{-1}.

c. Utiliser le résultat précédent pour calculer l'intégrale

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie B

Dans cette partie, on désigne par f l'application de $\mathrm{J} = \left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ +\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\sin x + \cos x),$$

et par C la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Résoudre dans J l'équation $f(x) = 0$.

Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ +\dfrac{7\pi}{4}\right[$.

On notera α le réel de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$, et on prendra $\alpha = \dfrac{\pi}{9}$; d'autre part, on ne cherchera pas à déterminer les valeurs maximale et minimale).

2. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à J, $|f(x)| \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.

b. Soit Γ et Γ' les représentations graphiques dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ des applications g et h de J dans $\mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad h(x) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

Calculer les abscisses des points communs à C et Γ d'une part, à C et Γ' d'autre part.

Établir qu'en tout point commun à C et Γ (respectivement : à C et Γ'), les deux courbes admettent la même tangente.

c. Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ sur C; calculer en fonction de y l'ordonnée du point M' d'abscisse $x + 2\pi$ sur C.

d. Utiliser les résultats précédents pour construire C, On commencera par mettre en place les courbes Γ et Γ', puis l'arc de C correspondant à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ +\dfrac{7\pi}{4}\right[$.

On donne :

x	$-\dfrac{9\pi}{8}$	$-\pi$	$-\dfrac{5\pi}{8}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{8}$
e^x	0,03	0,04	0,14	0,21	0,67

Partie C

Les solutions dans l'intervalle J = $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ +\infty\right[$ de l'équation $f(x) = 0$ forment la suite de réels $\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{N}$.
On note comme au A :

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{puis} \quad I_1 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et d'une manière générale, pour tout entier naturel k :

$$I_k = \int_{-\frac{\pi}{4}+k\pi}^{-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En utilisant les résultats du A, trouver une primitive F de f sur J, ayant la propriété suivante : il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout réel x appartenant à J, $F(x+\pi) = -\lambda F(x)$.

   En déduire une expression simple de I_{k+1} en fonction de I_k et de λ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |I_k|$.

   Exprimer S_n en fonction de I_0, λ et n.

   S_n admet-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?