

∞ Baccalauréat C Pondichéry mai 1981 ∞

EXERCICE 1

k étant un entier naturel quelconque, soit x et y les deux entiers tels que

$$\begin{aligned}x &= 7k^2 + 3k + 1 \\y &= 8k + 3.\end{aligned}$$

1. Vérifier que $(x; y)$ est solution de l'équation

$$64x - (56k + 3)y = 55.$$

2. Quelles sont les valeurs possibles du P.G.C.D., d , de x et y ?
3. Montrer que d est égal à 55 si, et seulement si, 55 divise y .
En déduire les valeurs de k pour lesquelles $d = 55$.

EXERCICE 2

La suite numérique $(n \mapsto u_n)$ est définie sur \mathbb{N} par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$ et que la suite est croissante.
2. On considère la suite $(n \mapsto v_n)$ définie par son terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

Montrer que la suite $(n \mapsto v_n)$ est une suite géométrique convergente.
Calculer u_n en fonction de n .
En déduire que u_n converge et calculer sa limite.

PROBLÈME

Partie A

E est un espace vectoriel euclidien orienté, de base orthonormée directe $(\vec{i} \ \vec{j})$, a est un nombre réel arbitraire et g_a désigne l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{i} \ \vec{j})$ est

$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ a+1 & -a \end{pmatrix}$$

1. a. Préciser les valeurs de a pour lesquelles g_a n'est pas bijective.

- b.** Quel est alors l'endomorphisme composé $g_a \circ g_a$?
En déduire que l'espace image $\text{Im}(g_a)$ est inclus dans le noyau $\text{Ker}(g_a)$. Montrer que ces sous-espaces sont confondus.
Préciser ce sous-espace pour chacune des valeurs de a trouvées au 1. a.
- c.** Montrer que g_0 est la composée $g_0 = r \circ p$ d'une projection vectorielle orthogonale que l'on précisera et de la rotation vectorielle r dont l'angle a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$.
- 2. a.** Montrer que g_1 est la composée d'une homothétie vectorielle h , de rapport positif, et d'une symétrie vectorielle orthogonale s que l'on précisera.
- b.** Montrer que g_1 est le seul automorphisme de E de la forme g_a qui transforme toute base orthonormée en une base orthogonale.
Existe-t-il une isométrie vectorielle de la forme g_a ?
- 3. a.** Montrer que g^{-1} est involutive. Est-ce une symétrie vectorielle orthogonale ?
- b.** Pour quelles valeurs de a , g_a est-elle involutive ? Préciser les directions caractéristiques de chacune de ces involutions.

Partie B

La fonction numérique f est définie par

$$f(x) = \text{Log}(e^{-x} - e)$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Préciser l'ensemble de définition \mathcal{D} de f et les limites aux bornes.
2. Étudier les variations de f .
3. Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan affine P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur étant 2 cm.
Étudier les branches infinies de (C) . Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C) .
Calculer l'abscisse du point A d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente (T) à (C) en A .
Tracer la courbe (C) .

Partie C

On appelle φ l'application affine de P laissant l'origine O invariante et admettant g^{-1} comme application linéaire associée.

1. Calculer les coordonnées (x', y') du point N' image par φ du point $N(x; y)$. Quelle est la nature géométrique de φ ?
2. On appelle (T) l'image de (C) par φ .
Montrer que $M(x; y)$ appartient à (T) si, et seulement si,

$$(1) \quad e^y = e^{x+2y} - e.$$

3. Trouver la fonction numérique h_1 telle qu'une équation de (T) soit

$$(2) \quad y = h_1(x)$$

4. Trouver la fonction numérique h_2 telle qu'une équation de (T) soit

$$(3) \quad y = h_2(x)$$

Quel est l'ensemble de définition de h_2 ?

Étudier les limites

$$\ell_1 = \lim_{y \rightarrow +\infty} [h_2(y) + y]$$

$$\ell_2 = \lim_{y \rightarrow -\infty} [h_2(y) + 2y]$$

En déduire que (T) admet deux asymptotes obliques dont on donnera des équations.

5. Construire la courbe (T) en utilisant les résultats obtenus en C 1. et C 4.