

∞ Baccalauréat S Pondichéry juin 2000 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x -ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.
2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.
En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.
On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on note $(i ; j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i ; j)$ la probabilité de cet évènement.
 - a. Calculer $P(2 ; 4)$.
 - b. Calculer $P(4 ; 5)$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ; unité graphique 4 cm.

On appelle B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i).$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 .
2. Soit M_2 le point d'affixe z_2 , image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer le module et un argument de z_2 .
Montrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Soit M_3 le point d'affixe z_3 , image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.
 - a. Montrer que $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.
 - b. Montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1 , M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.

5. À tout point M du plan d'affixe z (distinct de B), on associe le point M' , d'affixe Z telle que $Z = \frac{1}{i-z}$.
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan (M distinct de B) tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.
 - a. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
 - b. Démontrer que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
 - c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
 - d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque?
 - e. En déduire que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 - a. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
 - b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

PROBLÈME**11 points****Partie A**

★ Étude de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

Soit la fonction g définie sur $] -3 ; 3[$ par : $g(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction g .
2.
 - a. Calculer les limites de g en -3 et en 3 .
 - b. Étudier le sens de variation de g sur $]0 ; 3[$.
Dresser son tableau de variation sur $] -3 ; 3[$.
3. Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormal d'unité graphique 4 centimètres. Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction g dans ce repère.
 - a. Déterminer une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0.
 - b. Tracer dans le repère la courbe (\mathcal{C}) et sa tangente (T) .

4. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
5. **a.** Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto xg(x)$.
- b.** Calculer l'aire, exprimée en cm^2 , de la portion de plan délimitée par la courbe (\mathcal{C}), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On donnera la valeur exacte de cette aire, puis une valeur approchée au mm^2 près.

Partie B

★ Étude d'une courbe paramétrée

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 4 centimètres. Soit la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t(3-t^2) \\ y(t) = tg(t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [-2; 2].$$

où g désigne la fonction étudiée dans la partie A. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1. **a.** Comparer d'une part $x(t)$ et $x(-t)$ et d'autre par $y(t)$ et $y(-t)$.
- b.** Par quelle transformation peut-on passer de $M(t)$ à $M(-t)$?
En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
2. Étudier la fonction $x : t \mapsto t(3-t^2)$ et dresser son tableau de variations sur $[0; 2]$.
3. En utilisant la partie **A.**, montrer que la fonction $t \mapsto y(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 2]$.
4. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0; 2]$.
5. Pour quelles valeurs de t l'abscisse de $M(t)$ est-elle nulle?
Préciser alors les ordonnées des points correspondants de (Γ).
6. Tracé de (Γ)
 - a.** Placer, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , les points $M(0)$, $M(1)$, $M(\sqrt{3})$ et $M(2)$ qui correspondent respectivement aux valeurs 0, 1, $\sqrt{3}$ et 2 du paramètre t .
 - b.** Préciser un vecteur directeur des tangentes à (Γ) aux points $M(0)$ et $M(1)$ et tracer ces tangentes.
 - c.** Tracer (Γ).