

## ❧ Baccalauréat S Pondichéry 18 avril 2012 ❧

### EXERCICE 1

6 points

**Commun à tous les candidats**

*Les deux parties sont indépendantes.*

#### Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
  - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
  - l'écriture «  $x := y$  » désigne l'affectation d'une valeur  $y$  à une variable  $x$ .

Variables	$a, b, c, d, e$ sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0; b := 0; c := 0; d := 0; e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a := \text{rand}(1, 50); b := \text{rand}(1, 50);$ $c := \text{rand}(1, 50); d := \text{rand}(1, 50);$ $e := \text{rand}(1, 50)$ Fin du tant que
Sortie	Afficher $a, b, c, d, e$

- a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :  
 $L_1 = \{2; 11; 44; 2; 15\}; L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\};$   
 $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}; L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}?$
  - b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.
  4. On note  $X$  la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.
    - a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  ? Préciser ses paramètres.
    - b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :

- il a été contrôlé 5 fois exactement ;
- il n'a pas été contrôlé ;
- il a été contrôlé au moins une fois.

**Partie B**

*Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

*On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.*

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle  $T$  l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que  $P(T) = 0,05$ .

On appelle  $D$  l'évènement : « le coureur est dopé ».

Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer  $P(D)$ .
2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

**EXERCICE 2****4 points****Commun à tous les candidats**

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère :

- les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  d'équations :

$$\mathcal{P} : x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x + y + 3z = 0.$$

- la droite  $\mathcal{D}$  ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

**Proposition 1**

La droite  $\mathcal{D}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 2**

La sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $O$  et de rayon 2 est tangente au plan  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 3**

L'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  est la droite  $\Delta$  dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 4**

Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  sont coplanaires.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

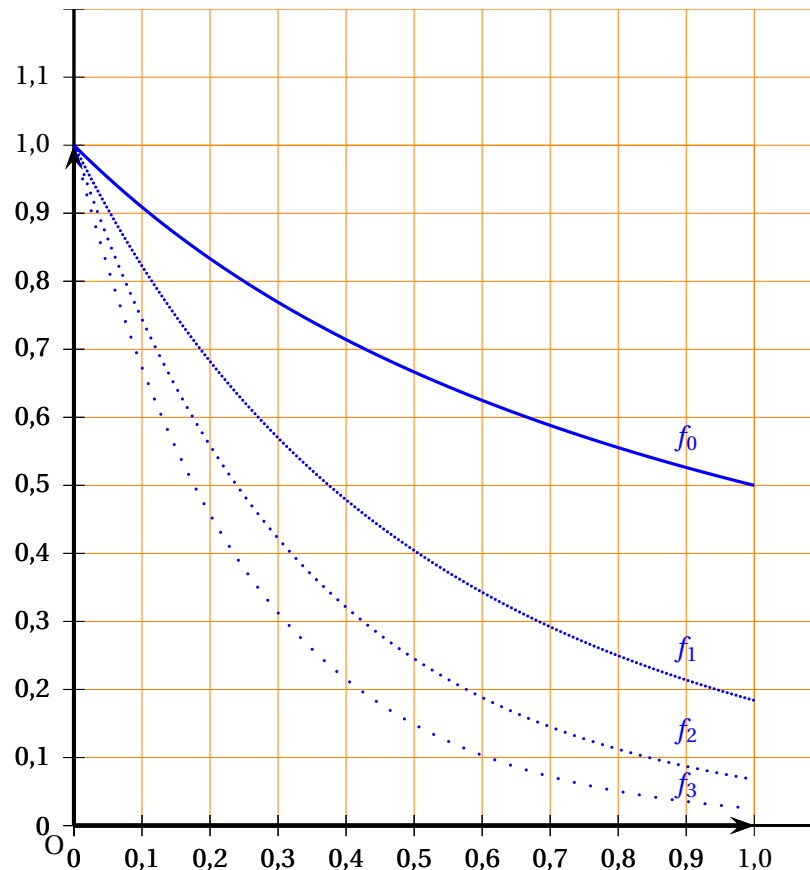
On considère les suites  $(I_n)$  et  $(J_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} dx.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions  $f_n$  définies sur l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de  $n$  :



- a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  en expliquant la démarche.
- b. Démontrer cette conjecture.
2. a. Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$  et pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  :

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}.$$

- b. Montrer que les suites  $(I_n)$  et  $(J_n)$  sont convergentes et déterminer leur limite.
3. a. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$I_n = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n \right).$$

- b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

**EXERCICE 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité****Partie A Restitution organisée de connaissances**

Soit  $z$  un nombre complexe. On rappelle que  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$  et que  $|z|$  est le module de  $z$ . On admet l'égalité :  $|z|^2 = z\bar{z}$ .

Montrer que, si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux nombres complexes, alors

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

**Partie B : Étude d'une transformation particulière**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et  $-1$ .

Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z \neq 1$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

- Soit C le point d'affixe  $z_C = -2 + i$ .
  - Calculer l'affixe  $z_{C'}$  du point  $C'$  image de C par la transformation  $f$ , et placer les points C et  $C'$  dans le repère donné en annexe.
  - Montrer que le point  $C'$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  de centre O et de rayon 1.
  - Montrer que les points A, C et  $C'$  sont alignés.
- Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble  $\Delta$  des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation  $f$ .
- Montrer que, pour tout point  $M$  distinct de A, le point  $M'$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .
- Montrer que, pour tout nombre complexe  $z \neq 1$ ,  $\frac{z'-1}{z-1}$  est réel.  
Que peut-on en déduire pour les points A, M et  $M'$ ?
- On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image  $D'$  par la transformation  $f$ .

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A Restitution organisée de connaissance**

Soit  $a, b, c, d$  des entiers relatifs et  $n$  un entier naturel non nul.

Montrer que si  $a \equiv b \pmod{n}$  et  $c \equiv d \pmod{n}$  alors  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .

### Partie B Inverse de 23 modulo 26

On considère l'équation

$$(E) : 23x - 26y = 1,$$

où  $x$  et  $y$  désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple  $(-9; -8)$  est solution de l'équation  $(E)$ .
2. Résoudre alors l'équation  $(E)$ .
3. En déduire un entier  $a$  tel que  $0 \leq a \leq 25$  et  $23a \equiv 1 \pmod{26}$ .

### Partie C Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

**Étape 1** Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers  $(x_1; x_2)$  où  $x_1$  correspond à la première lettre du mot et  $x_2$  correspond à la deuxième lettre du mot.

**Étape 2**  $(x_1; x_2)$  est transformé en  $(y_1; y_2)$  tel que :

$$(S_1) \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq y_1 \leq 25 \text{ et } 0 \leq y_2 \leq 25.$$

**Étape 3**  $(y_1; y_2)$  est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :  $\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \xrightarrow{\text{étape1}} (19, 4) \xrightarrow{\text{étape2}} (13, 19) \xrightarrow{\text{étape3}} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$

1. Coder le mot ST.
2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :
  - a. Montrer que tout couple  $(x_1; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(S_1)$ , vérifie les équations du système :

$$(S_2) \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26} \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

- b. À l'aide de la partie B, montrer que tout couple  $(x_1; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(S_2)$ , vérifie les équations du système

$$(S_3) \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

- c. Montrer que tout couple  $(x_1; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(S_3)$ , vérifie les équations du système  $(S_1)$
- d. Décoder le mot YJ.

Annexe à rendre avec la copie

**EXERCICE 4**