

∞ **Baccalauréat Pondichéry juin 1964** ∞
mathématiques élémentaires

I.

1. Le plan étant rapporté à deux axes orthonormés, par quelle transformation ponctuelle la courbe d'équation $y = a^x$ se déduit-elle de la courbe d'équation

$$y = \log \frac{1}{a} x \quad (a > 0) ?$$

2. Soit $P(z) = z^4 + z^3 + az^2 + bz + 10$ un polynôme de la variable z , où les coefficients a et b sont réels.

Calculer a et b , sachant que $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ est racine de l'équation $P(z) = 0$.

II.

Partie A

1. Vérifier que le polynôme $x^2 - 3x - 2$ est divisible par $x + 1$.
2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Étudier ses variations et tracer son graphique (\mathcal{C}_1) en axes orthonormés.

On précisera les points où la tangente est parallèle à $x'Ox$, les asymptotes, les points de rencontre éventuels avec les asymptotes, le ou les points d'inflexion.

3. Calculer l'aire $S(x)$ du domaine limité par (\mathcal{C}_1), son asymptote oblique et les deux parallèles à $y'Oy$ d'abscisses x et $x + 1$, x étant supérieur à 1.
Déterminer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère maintenant la fonction

$$f_p(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{p}{x^2}.$$

où p est un nombre réel.

Vérifier que $y = f_p(x)$ et $y' = f'_p(x)$ satisfont à la relation $x^2 y' + 2xy = 3x^2 + 3$.

1. Discuter, suivant la valeur de p , le nombre de points du graphique, (\mathcal{C}_p), de $f_p(x)$ en lesquels la tangente est parallèle à $x'Ox$.
2. Construire le lieu (L) de ces points lorsque p varie.
3. Quelle transformation permet de déduire la courbe (\mathcal{C}_{-p}) de la courbe (\mathcal{C}_p) ; on pourra, pour cela, comparer $f_p(x)$ et $f_{-p}(-x)$.
Indiquer la forme de (\mathcal{C}_{-p}) lorsque $0 < p < 1$ et lorsque $p > 1$.