Baccalauréat mathématiques élémentaires Pondichéry mai 1963

EXERCICE 1

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction logarithme népérien, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n},$$

où n est un entier positif.
En déduire que la suite dont le terme de rang n est

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ lorsque n augmente indéfiniment.

EXERCICE 2

Dans l'espace rapporté à trois axes de coordonnées on considère les trois points

$$\text{A}(a, b, c), \quad \text{B}(b, c, a), \quad \text{C}(c, a, b).$$

Quel est le lieu du centre de gravité du triangle ABC lorsque a, b, c varient ?

EXERCICE 3

À tout point m du plan complexe, d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M d'affixe

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Déterminer les coordonnées, X, Y, de M en fonction de celles, x, y, de m.
2. Montrer que, lorsque m décrit un cercle de centre O et de rayon r, le point M décrit une ellipse (E), dont on déterminera les axes et les foyers.
   Inversement, on se donne une ellipse (E) de la famille trouvée ; de quel cercle est-elle la transformée ?
3. Montrer que, lorsque m décrit une droite issue de O, le point M décrit une hyperbole (H), dont on déterminera les axes, les foyers et les asymptotes.
   Inversement, on se donne une hyperbole (H) de la famille trouvée. De quelle droite est-elle la transformée ?
4. En combien de points se coupent une ellipse (E) et une hyperbole (H) quelconques ?
   Montrer qu'en chacun de leurs points communs elles se coupent orthogonalement.