Activités d'introduction aux probabilités en classe de première
Journées Nationales APMEP
Marseille 2013

I. Introduction

Les changements de programme en première à la rentrée 2011 ont introduit des notions jusque là enseignées en terminale, en particulier la loi binomiale. La question se posait donc de la réception de ces notions par des élèves plus jeunes, et ayant moins de bagages mathématique, non pas en termes de contenus (car, pour ce chapitre, les notions vues dans les nouveaux programmes de troisième et seconde apportent les contenus vus auparavant en classe de première), mais plutôt en termes d'habitudes de raisonnement et de recherche, ainsi que d'autonomie des élèves.

J'avais l'habitude en Terminale scientifique d'introduire les probabilités par la recherche en classe d'un problème ouvert, et j'ai donc décidé de procéder de même dans ma classe de première S, en janvier 2012. La classe était une classe très hétérogène de 33 élèves, avec une excellente tête de classe, mais aussi des élèves en très grande difficulté. L'ambiance était excellente, comme souvent dans ce type de classe au lycée Flora Tristan (93, Noisy-le-Grand), l'ensemble des élèves se montrant toujours intéressés et actifs vis-à-vis des activités proposés en classe.

Nous avions traité les chapitres concernant les trinômes, valeurs absolues, fonctions associées, équations/inéquations, fonction racine carée, les statistiques élémentaires de première (fréquences, boîtes à moustaches,...), dérivation, tangentes, lien avec le sens de variation, vecteurs, dichotomie. Mais nous n'avions jamais parlé de probabilités, ni traité les suites.

L'activité présentée ci-dessous se déroule donc avant tout rappel sur les probabilités et on y verra apparaître « naturellement » les suites.

L'emploi du temps de la classe n'était pas « idéal » : 2h le mardi (1h en classe entière + 2 fois 1h en groupe), 1h en classe entière le jeudi suivie d'1h d'accompagnement personnalisé, 1h le samedi.

II. L'activité en classe

1. Présentation.

Première séance : 2h le jeudi 26 février, en classe entière.

Les élèves travaillent par groupes de 3 ou 4. La séance commence par un temps de recherche silencieuse de 15 minutes environ avant la mise en commun à l'intérieur de chaque groupe : ce temps est absolument nécessaire, pour que chacun(e) s'approprie le problème en cherchant individuellement sur le cahier d'exercices. C'est moi qui donne le signal de la mise en commun dans chaque groupe ; à la fin de la séance, je ramasse une feuille par groupe et, bien entendu, je circule pendant toute la séance de groupe en groupe pour discuter et aider les groupes à aller au bout de leurs idées. Les groupes ne doivent s'attaquer aux questions supplémentaires qu'après avoir rédigé la solution de la première question.

Texte distribué aux élèves

Georges et Méré, comme chaque jour à midi, jouent au 421 sur le comptoir du bar de Port-Royal, à la station de R.E.R.. Une discussion s'engage sur les paris :

Il est évidemment désavantageux de parier qu'on obtiendra 6 en lançant une fois un dé. Est-ce encore le cas si on parie qu'on obtiendra au moins une fois un 6 en lançant deux fois le dé ? En le lançant trois fois ?

En le lançant quatre fois ?

Georges se tourne alors vers son voisin de droite, un certain Blaise Pascal, pour lui demander son avis. Retrouver la réponse de celui-ci en développant ses raisonnements.

Questions supplémentaires :

1°) On lance quatre fois un dé : est-il plus avantageux de parier qu'on va obtenir exactement une fois le numéro 6 ou exactement deux fois le numéro 6 ?

2°) Même question si on lance douze fois le dé.

3°) Est-il plus avantageux de parier qu'on va obtenir au moins une fois le numéro 6 en lançant quatre fois un dé ou de parier qu'on va obtenir au moins une fois un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés ?

Enoncé (provenant d'un problème historique) inspiré de : Frugier exercices ordinaires de probabilités, Ellipse 1992)

Vous trouverez en annexe les copies des élèves, dont je commente ci-dessous les solutions pour la première question.

La première idée spontanée est souvent la proportionnalité : une chance sur six pour un lancer, deux chances sur six pour deux lancers, trois chances sur six pour trois lancers, etc. Soit les élèves poussent le raisonnement jusqu'au bout (sis chances sur six pour six lanxcers, sept chances sur six pour sept lancers) et voient seuls le problème, soit e fais avec eux et ils reconnaissent que la méthode n'est pas bonne. Pour ceux qui réagissent seuls, il n'est pas trop difficile de passer à un autre mode de raisonnement, mais lorsque je dois intervenir, c'est parfois plus difficile : un groupe a mis une heure à se détacher du raisonnement spontané pour vraiment démarrer : il est donc nécessaire de prévoir deux heures, les questions supplémentaires étant indispensables pour les groupes les plus rapides.

Copie n°1 : le groupe construit l'arbre donnant toutes les possibilités pour deux lancers et calcule la probabilité de gagner en deux lancers. Constatant qu'il est impossible de construire l'arbre pour 3 lancers, les élèves construisent un raisonnement permettant de connaître le nombres d'issues favorables pour 3 lancers à partir du nombre d'issues favorables pour 2 lancers, puis passent de même de 3 lancers à 4 lancers. Il est intéressant de constater que ce raisonnement est analogue à celui donnant la formule de récurrence sur les $\binom{n}{k}$.

Copie n°2 : le groupe construit un arbre pondéré s'arrêtant au premier six obtenu. Le groupe a mis énormément de temps à se détacher de leur première idée de proportionnalité, en cherchant à corriger la proportionnalité par un facteur décroissant avec le nombre de lancers pour éviter la contradiction signalée plus haut. Puis l'un d'eux a commencé à esquisser un arbre, et le groupe a résolu le problème. Cette solution a l'avantage de mener à une variable aléatoire suivant une loi,géométrique tronquée, ce qui est bien utile pour la synthèse.

Copies 3 et 4 : ces deux groupes ont construit un arbre pondéré complété pour 4 lancers, sans s'arrêter au premier 6 obtenu. L'avantage est évidemment qu'on peut ainsi résoudre facilement la première question supplémentaire. Cette méthode mène à une variable aléatoire suivant la loi binomiale.

Copie n°5 : ce groupe résout très rapidement la question en considérant l'événement contraire ! Heureusement qu'il y a des questions supplémentaires !

Copie n°6 : un arbre pondéré ne respectant pas les notations usuelles, ce qui n'a pas d'importance. La méthode est comprise, et il ne reste lors de la synthèse qu'à fixer les notations.

Copie n°7 : méthode semblable à la copie n°1, mais le raisonnement n'est pas écrit.

Copie n°8 : méthode des copies 1 et 6.

Copie n°9 : idem.

3. La synthèse en classe.

a. Le temps : la synthèse en classe, prise par les élèves dans le cahier de cours, est faite au tableau en dialogue avec la classe ; les copies sont montrées, commentées et certaines sont distribuées. Cette synthèse prend 6 heures, durant lesquelles la classe voit émerger les notions du cours de 1S. Cette synthèse sera suivi d'un cours « classique » s'appuyant sur des feuilles photocopiées.

b. La synthèse en classe.

Un problème de dés

Synthèse

Rappel du problème : on lance un dé cubique équilibré n fois.

Le problème est de savoir à partir de quel n il est avantageux de parier qu'on obtiendra au moins un 6, c'est-à-dire à partir de quel n on a $p(\mathrm{E}_n) \geq \frac{1}{2}$ avec E_n : « on obtient au moins une fois un 6 en n lancers ».

I. Méthode de dénombrement

1. Cas de deux lancers