

APMEP, régionale de Franche-Comté  
19 mars 2008, Michel Henry

# Probabilité et proportionnalité

Évaluation des « chances » par  
des élèves de 11 à 15 ans

# Un petit problème pour les 11 - 15 ans (Rallye mathématique transalpin 13, 2005)

## Les pots de bonbons

Grand-mère a rangé des bonbons dans des pots.

Dans un premier pot, Grand-mère a mis 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.

Dans un deuxième pot, elle a mis 8 bonbons à l'orange et 14 au citron.

Les bonbons sont de la même forme et sont enveloppés de la même façon.



## Les pots de bonbons, la question:

Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

*« Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur ».*

Julien réfléchit bien et choisit le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

**À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?**

**Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.**



# Analyse de la tâche

## Différentes approches

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

- Il ne suffit pas de choisir le pot qui a le plus de bonbons à l'orange ou le moins de bonbons au citron, mais il faut aussi tenir compte des deux quantités simultanément, par un rapport de grandeurs.
- Déterminer, puis comparer, les rapports des nombres de bonbons à l'orange et au citron, au moyen de fractions (de même dénominateur ou numérateur) ou en divisant l'un par l'autre.
- Ou déterminer et comparer les rapports du nombre de bonbons à l'orange au nombre total des bonbons dans chacun des pots.
- Ou planifier un raisonnement proportionnel du type : dans un pot de 6/10 on aurait les mêmes possibilités que dans un pot de 12/20, ...

# Analyse a posteriori, différents types de réponses

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## A. Comparaison entre les nombres de bonbons au citron

- « A la place de Julien on aurait plongé la main dans le pot I. Julien n'aime pas les bonbons au citron, comme il y en a moins que dans le pot II, il a plus de chance de tomber sur un bonbon à l'orange. ».
- « J'aurais choisi le pot I car dans le pot II il y a 14 bonbons au citron. ».

Autres réponses, difficiles à « cataloguer » :

- « A la place de Julien je choisirais le pot I car il y a moins de bonbons à l'orange car il n'aime pas. ».
- « Je choisirais le pot I car il n'y a pas beaucoup de différence entre les bonbons au citron et à l'orange. Et il y a moins de bonbons en tout que dans le I que II. ».
- « Ça ne change rien car la chance de tomber sur un bonbon à l'orange est la même :  $6 \times 2 - 10 = 2$ ,  $8 \times 2 - 14 = 2$  ».

# Analyse a posteriori, différents types de réponses

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## B. Comparaisons des différences internes d'un pot à l'autre

Le raisonnement ne prend en compte que les bonbons au citron « en plus » de ceux à l'orange.

- « *Dans le pot I, il y a 4 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Dans le pot II, il y a 6 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Donc nous choisissons le pot I. ...* »
- « *Nous avons choisi le no 1 car il n'y a que 4 bonbons à l'orange de moins qu'au citron tandis que dans le no 2 il y a 6 bonbons de moins, donc il y a plus de chances.* »
- « *... car dans le pot no 1 il y a moins de différence entre les deux sortes de bonbons donc plus de chance des bonbons à l'orange, en quelque sorte il y a plus de bonbons à l'orange donc on a plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange dans le pot no 1.* »
- « *A la place de Julien, j'aurais choisi le pot no 1 car l'écart des bonbons au citron et à l'orange est de 4 et l'autre pot est de 6 donc il y a moins de risque de prendre un bonbon au citron.* »

Analyse a posteriori,  
différents types de réponses

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## B. Comparaisons des différences internes d'un pot à l'autre

Cependant, il peut y avoir implicitement (mais ce n'est pas garanti) l'idée de minimiser le poids des bonbons au citron dans le pot, ce qui révélerait une approche qualitative de la notion de probabilité

- « *Il faut donc choisir le pot I car il n'y a qu'une chance sur 4 de ne pas se tromper alors qu'avec le pot II il y a une chance sur 6 de ne pas se tromper* ».
- « *A la place de Julien, j'aurais choisi le pot no 1 car l'écart des bonbons au citron et à l'orange est de 4 et l'autre pot est de 6 donc il y a moins de risque de prendre un bonbon au citron.* »
- « *... car il y a moins de bonbons au citron en plus dans le pot I.* »

# Analyse a posteriori, différents types de réponses

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## C. Comparaison des variations d'un pot à l'autre

L'argumentation repose sur le constat que, du premier pot au second, le nombre des bonbons à l'orange a augmenté de 2 et celui des bonbons au citron de 4.

Bien qu'il s'agisse toujours de différences, on peut sous-entendre le raisonnement suivant : puisque, dans cette augmentation, il y a plus (le double) de bonbons au citron, on «se dit que » le risque de tirer un bonbon au citron a tendance à augmenter du pot I au pot II.

- « *Nous avons choisi le pot I car : dans le pot II il y a que 2 bonbons de plus à l'orange mais 4 de plus au citron* ».

- « *Il faut prendre le premier pot car  $6 + 2 = 8$  et que  $10 + 4 = 14$ , comme  $2 < 4$  donc on rajoute plus de citron que d'orange* »

- « *... car il y a plus de chance de prendre le 1er pot de bonbons sachant que dans le 1er pot il y a moins de bonbons au citron que dans le 2e pot : le premier contient 10 bonbons au citron et le 2e pot en contient 14 donc il y a 4 bonbons de plus au citron, alors qu'il y a que 2 bonbons à l'orange rajoutés dans le 2ème pot* »



# Analyse a posteriori, différents types de réponses

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## D. Fractions ou rapports

La procédure qui conduit à la réponse correcte nécessite une comparaison de rapports et non de différences.

On trouve deux choix de rapports dans les copies examinées :

- D.1: entre les nombres de bonbons à l'orange et ceux au citron,
- D.2: entre les nombres de bonbons d'une sorte et le total de ceux contenus dans le pot.

- « *A la place de Julien on aurait choisi le pot 1. Il faut mettre  $6/10$  et  $8/14$  sur le même dénominateur:  $6/10 = 42/70$  et  $8/14 = 40/70$ .  $42 > 40$ . Donc j'aurais choisi le pot I car quand on met au même dénominateur  $6/10$  et  $8/14$  le nombre de bonbons à l'orange dans le pot I est de 42 et dans le pot II de 40. ».*

- « *Pour savoir dans quel pot il y a le plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange, il faut exprimer le nombre de bonbons à l'orange en pourcentages: 6 pour 10  $\rightarrow$  60 %, 8 pour 14  $\rightarrow$  57,12 %. Il y a plus de chance de trouver un bonbon à l'orange dans le pot I (60 %) ».*

# Analyse a posteriori, différents types de réponses

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## D. Fractions ou rapports

D.2: entre les nombres de bonbons d'une sorte et le total de ceux contenus dans le pot. Cette conception renvoie à l'approche classique de la notion de probabilité (définition de Laplace).

- « ...  $12/32 > 12/33$  donc  $6/16 > 8/22$ , pot I, car si 2 nombres en écriture fractionnaire ont le même numérateur, alors le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur. ».

-« Le nombre des bonbons de la boîte no 1 est égal à 16. En divisant le nombre des bonbons à l'orange (6) et au citron (8) par 16, on obtient alors : \* Bonbons à l'orange : 37,5%, \* au citron : 62,5 % ». (même raisonnement pour le pot II et comparaison des %).

- « .... Pot 1 :  $6 : 8 = 0,75$ . Il y a 0,75 chances sur 2 de tomber sur un bonbon à l'orange.

Pot 2 :  $8 : 11 = 0,72$ . Il y a 0,72 chances sur 2 de tomber sur un bonbon à l'orange. »

# Analyse a posteriori, différents types de réponses

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## E. procédures mixtes

Deux copies font simultanément référence à la soustraction et aux rapports. C'est un faible pourcentage des 96 copies examinées mais elles paraissent révélatrices de l'évolution d'une procédure à l'autre :

- « A la place de Julien, je choisirais le pot no 1 car dans ce pot il y a 4 bonbons de plus qu'à l'orange et dans le pot no 2 il y a 6 bonbons au citron de plus qu'à l'orange.

Et car il y a 37,5 % de bonbons à l'orange dans le pot no 1 contre 36,4% dans le pot 2.

Pot 1 :  $6/16 = 0,375 \times 100 = 37,5\%$ .

Pot 2 :  $8/22 \approx 0,36 \times 100 \approx 36,36 \%$  »

# Les effets de l'âge sur les procédures

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## Analyse sur 96 classes, élèves de 11 à 15 ans

On constate une évolution vers les procédures « expertes » avec l'âge. Celles qui reposent sur les différences, B et C, sont choisies par les trois quarts des élèves de 11-12 ans et celle qui fait appel aux rapports, D, est largement majoritaire à 13-15 ans.

Procédures âges	A	B	C	D	D1	D2	M	total
11-12 ans	<b>7</b> 19%	<b>21</b> 58%	6 17%	2 7%	1 3%	1 3%		<b>36</b> 100%
12-13 ans	1 3%	<b>12</b> 40%	1 3%	<b>14</b> 47%	5 17%	9 30%	2 7%	<b>30</b> 100%
13-14 ans	2 7%	4 13%	2 7%	<b>21</b> 70%	7 23%	14 47%	1 3%	<b>30</b> 100%
total	<b>10</b> 10%	<b>37</b> 39%	9 9%	<b>37</b> 39%	13 14%	24 25%	3 03%	<b>96</b> 100%

# Perspectives de recherche

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## Un constat: une évolution rapide de la conceptualisation

Première approche : combien de « chances » de gagner ?

- Méline, 7 ans : « *je choisirais le deuxième pot !* »
- Pourquoi ?
- « *Parce que c'est dans ce pot qu'il y a le plus de bonbons à l'orange, évidemment* ».

Méline maintient sa réponse quand le deuxième pot contient 100 bonbons au citron et 8 à l'orange.

Ou combien de chances de perdre ? (Stéphane, 10 ans)

- « *J'aurais choisi le pot I car dans le pot II il y a 14 bonbons au citron.* »

# Perspectives de recherche

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## Un constat: une évolution rapide de la conceptualisation

Deuxième temps : les structures additives (12 ans)

- « ... Il faut prendre le pot no 1 car il y a moins de différence entre les bonbons à l'orange et au citron. »

Troisième étape : la proportionnalité (14 ans)

« Pour savoir dans quel pot il y a le plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange, il faut exprimer le nombre de bonbons à l'orange en pourcentages. »

# Perspectives de recherche

6 or  
10 ci



8 or  
14 ci

## Des projets de recherches

- 1 - Étudier l'évolution de la conceptualisation, de l'appréhension numérique des « chances » à l'acquisition de la pré-probabilité.
- 2 - Comprendre le passage de l'approche par la différence des « chances » au rapport cardinaliste et aux pourcentages.
- 3 - Intérêt du modèle d'urne pour favoriser l'approche par la pré-probabilité et obstacles possibles (notamment la proportionnalité).
- 4 - Comment un élève peut-il interpréter (modéliser) une situation donnée dans des habillages traditionnels en modèle d'urne ?
- 5 - Comment et dans quelles conditions se fait la liaison entre une compréhension a priori de la probabilité comme rapport de cas et le contrôle a posteriori par les fréquences ?

# Une réponse impertinente

**À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?**

**Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.**

À la place de Julien  
nous prendrions citron  
car c'est notre goût  
préférés.

on a réfléchis.