

# GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGÉNIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN TELECOM

Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE

30 avril 2024

## MATHÉMATIQUES QCM (40 points)

Les questions à choix multiples sont signalées par la mention QCM. Pour chaque QCM, plusieurs réponses sont proposées et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Vous entourerez la (ou les) réponse(s) choisies sur la feuille de réponses.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive ne sera pas pénalisée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

Pour chaque exercice plusieurs affirmations sont proposées. Pour chaque affirmation, vous direz si elle est vraie ou fautive en coloriant la réponse choisie sur la feuille de réponses.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive sera pénalisée par des points négatifs.

Pour chaque exercice, le total des points obtenu ne peut être strictement négatif.

Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

Les exercices sont tous indépendants.

### Première partie – Calculs

#### Exercice I

I-A-  $\frac{(2\sqrt{3})^2 \times 12^3 \times 3^2}{3^{-4} \times (\sqrt{2})^4} = 3^{10} \times 2^8.$

I-B-  $2\sqrt{27} - (2\sqrt{3} - 1)^2 = 10\sqrt{3} - 13.$

I-C-  $\ln\left(\frac{e}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{9e}\right) + \ln(36e) = 1.$

I-D-  $e^{2\ln(3)+\ln(5)} + e^{-2\ln(5)} = 20.$

I-E- Pour tout nombre réel  $x$  différent de  $-2$  et de  $2$ ,  $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}.$

I-F- Pour tout nombre réel  $x$ ,  $\frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x + 1} = e^x + 1.$

## Deuxième partie – Fonctions

### Exercice II

**II-A-** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  admet pour dérivée  $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}$ .

**II-B** La fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x\sqrt{x}$  est une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ .

**II-C-** La fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = (\ln(3x))^2$  admet pour dérivée la fonction  $f'$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f'(x) = \frac{2}{3x} \ln(3x)$ .

**II-D-**  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x) - x) = -\infty$ .

**II-E-**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - \ln(x)) = 0$ .

### Exercice III

Soit  $f$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  différent de 1 par

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans une repère orthonormé.

**III-A-**  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ .

**III-B-** Une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$ , au point d'abscisse  $x = -1$  est  $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ .

**III-C-**  $f$  est concave sur  $]1; +\infty[$ .

## Troisième partie – Suites numériques

### Exercice IV

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $u_n \neq 0$  pour tout entier naturel  $n$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $v_n = -\frac{2}{u_n}$ .

**IV-A-** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 2, alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $-1$ .

**IV-B-** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**IV-C-** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

## Quatrième partie - Probabilités

### Exercice V

On lance cinq fois un dé à six faces.

Cocher VRAI si la variable aléatoire proposée suit une loi binomiale et FAUX dans le cas contraire.

**V-A-** La variable aléatoire correspondant au nombre de lancers où apparaît un numéro pair.

**V-B-** La variable aléatoire correspondant à la somme des résultats de tous les lancers.

### Exercice VI

$\Omega$  désigne l'univers d'une expérience aléatoire  $E$  et  $P$  désigne une probabilité sur  $\Omega$ .  $A$  et  $B$  sont deux évènements de probabilités respectives 0,6 et 0,4. On suppose que  $P(A \cup B) = 0,8$ .

VI-A-  $P(A \cap B) = 0,24$ .

VI-B-  $A$  et  $B$  sont des évènements contraires.

VI-C-  $A$  et  $B$  sont des évènements indépendants.

VI-D-  $A$  et  $B$  sont des évènements incompatibles.

### Cinquième partie - Géométrie dans le plan

#### Exercice VII

On considère les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives dans une repère orthonormé :  $A(2 ; 0)$  et  $B(0 ; -4)$ .

VII-A- Une équation de la droite  $(AB)$  est  $2x - y - 4 = 0$ .

VII-B- Une équation de la médiatrice du segment  $[AB]$  est  $x + 2y + 3 = 0$ .

VII-C- Une équation du cercle de diamètre  $[AB]$  est  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ .

VII-D- Le point de coordonnées  $(-1 ; -1)$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$ .

VII-E- La droite d'équation  $2x - y + 1 = 0$  est tangente au cercle de diamètre  $[AB]$ .

### Mathématiques Spécialité - EXERCICE I (20 points)

#### Première partie

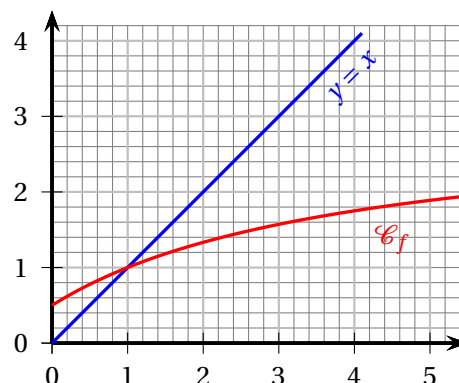
On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est la fonction définie pour tout réel positif par  $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ .

On admet que, **pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est supérieur ou égal à 1.**

I-1-a- Calculer les valeurs exactes de  $u_1$  et  $u_2$ . Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

I-1-b- Le graphique ci-contre donne la courbe représentative dans une repère orthonormé de la fonction  $f$ .

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant les variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ? Préciser la limite éventuelle.



On se propose d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en utilisant deux méthodes différentes.

**Deuxième partie - Méthode 1**

**I-2-a-** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ .

**I-2-b-** En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Justifier votre réponse.

**I-3-** Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

**I-3-** Déterminer la valeur de  $\ell$ . Justifier votre réponse.

**Troisième partie - Méthode 2**

On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .

**I-5-** Calculer  $v_0$ .

**I-6-a-** Déterminer la constante  $k$  dans  $[0 ; 1]$  telle que  $v_{n+1} = k \times v_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

Justifier la réponse. Que peut-on dire sur la nature de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

*Pour les questions I-6-b et I-6-c, les réponses peuvent être exprimées en fonction de  $k$  ou de sa valeur.*

**I-6-b-** En déduire une expression de  $n_n$  en fonction de  $n$ .

**I-6-c-** En déduire la convergence de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et sa limite. Justifier la réponse.

**I-7-a-** Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**I-7-b-** En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et sa limite. Justifier la réponse.

**Mathématiques Spécialité - EXERCICE II (20 points)**

*Les questions de la partie I peuvent être traitées de manière indépendante.*

Dans cet exercice,  $K$  et  $a$  sont des constantes réelles strictement positives.

**Partie I - Études préliminaires**

On considère l'équation différentielle  $(E_1) : z'(t) + z(t) = \frac{1}{K}$ , où  $z$  est une fonction définie et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ .

**II-1-** Donner la solution générale de  $(E_1)$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel positif par :  $f(t) = \frac{10}{1 + ae^{-t}}$ .

**II-2-** Compléter le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ . Préciser les valeurs de  $f$  en 0 ainsi que la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

*Tableau de variations à compléter sur la fiche réponse :*

$t$	0	$+\infty$
Variations de $f$		

**II-3-** Déterminer, en fonction de  $a$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $f(t) = 5$ .

**Partie II - Évolution d'une population de marmottes**

Soit  $y_0$  un réel strictement positif.

On étudie l'évolution d'une population de marmottes, qui compte initialement  $y_0$  milliers d'individus.

On admet que la taille de la population, exprimée en milliers d'individus, au bout de  $t$  années (avec  $t \geq 0$ ) est une fonction  $y$  dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ , solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) : y'(t) = y(t) \left( 1 - \frac{y(t)}{K} \right)$$

La constante  $K$  s'appelle la capacité d'accueil du milieu, exprimée en milliers d'individus.

On admet qu'il existe une unique fonction  $y$  solution de  $(E_2)$  qui vérifie  $y(0) = y_0$ . On admet que cette fonction est à valeurs strictement positives sur  $[0 ; +\infty[$ .

**II-4-a-** Exprimer  $z'(t)$  en fonction de  $y'(t)$  et  $y(t)$ .

**II-4-a-** On souhaite montrer que  $z$  est solution de  $(E_1)$  si, et seulement si,  $y$  est solution de  $(E_2)$ .

Compléter :

- la **Ligne 1** à l'aide d'une expression utilisant  $z'(t)$  et  $z(t)$ ;
- la **Ligne 2** et la **Ligne 3** à l'aide d'une expression utilisant  $y'(t)$  et  $y(t)$ .

*Partie à compléter sur la feuille réponse :*

$z$ solution de $(E_1)$	$\iff$	.....	$= \frac{1}{K}$	pour tout réel $t$ positif	<b>(Ligne 1)</b>
	$\iff$	.....	$= \frac{1}{K}$	pour tout réel $t$ positif	<b>(Ligne 2)</b>
	$\iff$	$y'(t) =$ .....		pour tout réel $t$ positif	<b>(Ligne 3)</b>
	$\iff$	$y'(t) = y(t) \left( 1 - \frac{K}{y(t)} \right)$		pour tout réel $t$ positif	
	$\iff$	$y$ solution de $(E_2)$			

**II-5-a-** En déduire les solutions de  $(E_2)$ .

**II-5-b-** On admet que l'unique solution  $y$  de  $(E_2)$  vérifiant  $y(0) = y_0$  s'écrit sous la forme

$$y(t) = \frac{K}{1 + ae^{-t}}. \text{ Exprimer } a \text{ en fonction de } y_0 \text{ et } K.$$

Dans un certain vallon de capacité d'accueil  $K = 10$ , les marmottes ont disparu. Les scientifiques souhaitent réintroduire  $y_0$  milliers de marmottes, avec  $0 < y_0 < 10$ .

Dans la suite de l'exercice, on prendra  $K = 10$ .

**II-6-** Justifier que la valeur de  $a$  obtenue à la question **II-5-b-** est bien strictement positive.

**II-7-a-** En utilisant le résultat de la question **II-3-**, donner la valeur de  $a$  telle que  $y(5) = 5$ .

**II-7-a-** En déduire la valeur exacte de  $y_0$  telle que  $y(5) = 5$ . Justifier la réponse.

**II-7-a-** La calculatrice donne 0,0669285092 comme résultat au calcul de la valeur de  $y_0$  de la question précédente.

Quel est le nombre minimal de marmottes à réintroduire pour qu'au moins 5 milliers de marmottes soient présentes au bout de 5 années après leur réintroduction ?