

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Reims juin 1969 ∞

EXERCICE 1

1. Montrer que, si  $a$  est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et si  $n$  est un entier positif, on peut écrire

$$\operatorname{Log} n a^n = n \operatorname{Log} a \left( 1 + \frac{\operatorname{Log} n}{n} \times \frac{1}{\operatorname{Log} a} \right).$$

En déduire que  $n a^n$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ( $a$  étant fixé et compris strictement entre 0 et 1).

2. On appelle  $S_n(x)$  la somme des  $n$  premiers termes de la progression géométrique qui a pour raison  $x$  et pour premier terme  $x$  ( $x$  réel différent de 1).

De l'expression de  $S_n(x)$  déduire une expression de

$$P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

Déterminer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $P_n(x)$  pour  $x$  réel fixé entre 0 et 1.

EXERCICE 2

On appelle  $F$  la transformation qui, à tout nombre complexe  $z = x + iy$ , associe le nombre

$$e^x (\cos y + i \sin y) = F(z).$$

1. Calculer  $x$  et  $y$  en fonction du module,  $r$ , et de l'argument,  $\theta$ , de  $F(z)$ . Établir une relation suffisante entre  $z$  et  $z'$  pour que  $F(z) = F(z')$ . Déterminer une partie,  $E$ , de  $\mathbb{C}$  telle que  $F$  soit bijective de  $E$  sur  $\mathbb{C} - \{0\}$ .
2. Soit  $T(z)$  la translation plane associée à  $z = x + iy$  (c'est-à-dire celle qui, dans un repère orthonormé, est définie par le vecteur de composantes  $x$  et  $y$ ). Soit  $S(z)$  la similitude associée au nombre  $Z = F(z)$  (c'est-à-dire celle qui a pour centre  $O$ , pour rapport  $r$  et pour angle  $\alpha$ ).
  - a. Montrer que  $T(z + z')$  est la composée de  $T(z)$  et de  $T(z')$  et que  $S(z + z')$  est la composée de  $S(z)$  et  $S(z')$ .
  - b. Peut-on dire que la correspondance qui à  $T(z)$  associe  $S(z)$  réalise un isomorphisme du groupe des translations planes sur le groupe des similitudes planes? Justifier la réponse.

PROBLÈME

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$  on considère la famille,  $F$ , des coniques d'axe  $Ox$  qui passent par le point  $A$  de coordonnées  $(+2 ; +4)$  et sont tangentes à la droite (qui passe par  $A$ ) d'équation

$$x - 2y + 6 = 0.$$

1. Déterminer l'équation générale de ces coniques et montrer que la famille  $F$  contient un cercle, une parabole et une hyperbole équilatère.
2. On considère l'hyperbole  $(H)$  d'équation

$$y^2 - x^2 = 12$$

et on la coupe par une droite variable  $(D)$  d'équation  $y = x + t$  ( $t$  étant un paramètre réel).

- a. Montrer qu'à toute valeur de  $t$  correspond, en général, un point d'intersection  $I(t)$  et un seul; exprimer les coordonnées de ce point en fonction de  $t$ .
- b. On associe à  $t$  le point  $M = I(t)$  et le point  $M' = I\left(-\frac{4}{t}\right)$ . Calculer les coordonnées de  $M'$  en fonction de  $t$ .

Déterminer l'ensemble  $(L)$  formé par les milieux des segments  $MM'$  quand  $t$  varie.

Montrer que la direction de la droite  $MM'$  est indépendante de  $t$ .

- c. On appelle  $B$  le symétrique de  $A$  par rapport à l'origine et  $Q$  le point d'intersection des droites  $AM$  et  $BM'$ . Déterminer l'équation de l'ensemble,  $(K)$ , des points  $Q$  (on pourra montrer que les pentes de  $AM$  et  $BM'$  sont liées par une relation indépendante de  $t$ ).

Montrer que l'équation de  $(K)$  peut se mettre sous la forme

$P_1(x, y) \cdot P_2(x, y) = 0$  (où  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes). Retrouver la nature de  $(K)$  par un raisonnement géométrique.

3. La portion  $(C)$  de  $(H)$  formée des points dont l'ordonnée est positive est la courbe représentative d'une fonction  $f$ .
  - a. Déterminer une constante  $A$  telle que la fonction  $F$  définie par

$$F(x) = \frac{x}{2}f(x) + A \operatorname{Log}[x + f(x)]$$

soit une primitive de  $f$ .

- b. Calculer l'aire du domaine plan compris entre  $(C)$  et les trois droites d'équations respectives

$$x = 0, \quad x = 2 \quad \text{et} \quad y = x.$$