

## ∞ Baccalauréat C Reims juin 1971 ∞

### EXERCICE 1

1. Calculer la dérivée de la fonction  $f$  qui, à  $x$  supérieur à 1, fait correspondre

$$f(x) = \text{Log}(\text{Log } x),$$

où  $\text{Log}$  désigne le logarithme népérien.

2. Établir les inégalités suivantes :

$$0 < \text{Log}[\text{Log}(k+1)] - \text{Log}[\text{Log } k] < k \text{Log } k$$

pour tout  $k$  entier supérieur ou égal à 2, en appliquant le théorème des accroissements finis à  $f$  entre  $k$  et  $(k+1)$ .

3. On pose

$$S_n = \frac{1}{2\text{Log } 2} + \frac{1}{3\text{Log } 3} + \dots + \frac{1}{n\text{Log } n}$$

Utilisant la question 2, établir que  $S_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### EXERCICE 2

1. Établir que  $(24n^2 + 8n)$  est divisible par 16, quel que soit l'entier  $n$  positif ou nul.  
En déduire que  $(2n+1)^4$  est congru à 1 modulo 16.
2. Montrer que, si  $a$  est un entier positif ou nul,  $a^4$  est congru à 1 ou à 0, modulo 16.  
En déduire que, si le nombre  $16n+15$  ( $n$  entier positif ou nul) est mis sous forme d'une somme de  $k$  puissances quatrièmes d'entiers; soit

$$16n+15 = x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_k^4,$$

alors, nécessairement, il faut  $k \geq 15$ .

### PROBLÈME

(P) est un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ; soit  $Ox$  et  $Oy$  les axes associés. Dans (P) on donne les points  $A(d; 0)$  et  $B(-d; 0)$ ,  $d$  étant un nombre réel strictement positif. Dans tout le problème,  $k$  et  $\alpha$  sont deux nombres réels qui satisfont aux conditions générales

$$k > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$$

et éventuellement à des conditions supplémentaires, qui seront précisées par l'énoncé.

### Partie A

Au couple  $(k ; \alpha)$  on fait correspondre le point  $m$  de (P) dont les coordonnées sont

$$(1) \quad \begin{cases} x &= d \frac{1-k}{1+k} \\ y &= d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que  $m$  appartient à l'intérieur (I) d'un carré, défini par

$$-d < x < d \quad \text{et} \quad -d < y < d.$$

2. Réciproquement, montrer que,  $m$  étant donné dans (I), les formules (1) lui font correspondre un couple  $(k ; \alpha)$  unique.

Quel couple correspond au point O de (P)?

### Partie B

1. Déterminer l'équation du cercle (C), ensemble des points  $M$  de (P) tels que  $\frac{MA}{MB} = k$  ( $k$  donné différent de 1).

Déterminer l'équation du cercle ( $\Gamma$ ), ensemble des points  $M$  de (P) tels que  $(MA, MB) \equiv \alpha$  [modulo  $\pi$ ] ( $\alpha$  donné différent de 0).

(On pourra exprimer  $\operatorname{tg} \alpha$  en fonction de  $x, y$  et  $d$ . On trouvera l'équation de ( $\Gamma$ ) :

$$x^2 + y^2 + 2d y \cotg \alpha - d^2 = 0.)$$

2. Soit (E) la région extérieure du disque limité par le cercle de diamètre AB, c'est-à-dire l'ensemble des points  $M$  tels que  $OM > d$ .

Montrer géométriquement qu'à tout couple  $(k ; \alpha)$  distinct du couple  $(+1 ; 0)$  correspond un point  $M$  de (E) et un seul tel qu'on ait simultanément

$$\frac{MA}{MB} = k, \quad (MA, MB) \equiv \alpha \text{ [modulo } \pi].$$

### Partie C

On appelle ( $I'$ ) l'intérieur, privé du point O, du carré défini à la partie A, question 1. et l'on considère l'application  $f$  de ( $I'$ ) dans (E) qui à  $m$  associe  $M$  de la façon suivante :

au point  $m$  on fait correspondre le couple  $(k ; \alpha)$ , défini à la partie A, question 2, et à ce couple  $(k ; \alpha)$  on fait correspondre  $M$  défini à la partie B, question 2. [Ainsi, à tout point  $m$  de ( $I'$ ) correspond par  $f$  un point  $M$  de (E).]

Soit D le point dont les coordonnées sont  $(d ; d)$  et D' le point dont les coordonnées sont  $(-d ; -d)$ .

On désigne par ( $\ell$ ) le segment DD' privé des points D, D' et O.

On se propose de chercher la transformée ( $L$ ) de ( $\ell$ ) par  $f$ .

1. Montrer que pour tout point  $m$  de  $(\ell)$  on a

$$k = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

2. Montrer que le cercle  $(C)$  [défini à la partie B, question 1.] a alors pour équation, en fonction de  $\alpha$ ,

$$(C) \quad x^2 + y^2 - \frac{2d}{\sin \alpha} x + d^2 = 0.$$

3. Calculer les coordonnées des points communs aux cercles  $(C)$  et  $(\Gamma)$ .  $(\Gamma)$  étant le cercle dont l'équation a été trouvée à la partie B, question 1.,

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 + 2d y \cot \alpha - d^2 = 0.$$

Préciser celui des deux points communs qui appartient à  $(E)$ .

4. Vérifier que  $(L)$  est une partie de la courbe dont l'équation est

$$x^2 - y^2 = d^2.$$

Préciser de quelle partie il s'agit et la représenter dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .