

♣ Baccalauréat C Reims juin 1973 ♣

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien orienté \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'x$ et $y'y$.

Soit D_1 la droite d'équation $x + y\sqrt{3} = 0$ et D_2 la droite d'équation $x\sqrt{3} - y = 0$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan de coordonnées x et y . On appelle M_1 la projection, parallèlement à $x'x$, de M sur D_1 et M_2 la projection, parallèlement à $y'y$, de M sur D_2 ; a et b étant deux nombres réels non nuls, soit $M'(x'; y')$ le point défini par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM_1} + b\overrightarrow{OM_2}.$$

1. Calculer x' et y' en fonction de x et de y .
2. Lorsque les nombres a et b sont fixés montrer que l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui au point M fait correspondre le point M' est une bijection affine que l'on notera $T_{(a, b)}$.
3. Pour quelles valeurs du couple (a, b) l'application $T_{(a, b)}$ est-elle involutive?
4. Pour quelles valeurs du couple (a, b) l'application $T_{(a, b)}$ est-elle une rotation de centre O ? Pour chaque couple (a, b) trouvé, déterminer l'angle de cette rotation.

EXERCICE 2

Pour tout couple d'entiers naturels (a, b) tels que $a < b$ on appelle D le PGCD et M le PPCM de (a, b) .

Trouver l'ensemble des couples (a, b) tels que $M - D = 77$.

PROBLÈME

On désigne par f_k la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f_k(x) = \frac{\text{Log } x}{x^2} - kx$$

et par \mathcal{C}_k la courbe représentative de f_k dans un plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé (courbe qu'on ne demande pas d'étudier dans le cas général).

Dans tout le problème k est un nombre réel vérifiant

$$0 \leq k \leq 1 \quad \text{c'est-à-dire } k \in [0; 1]$$

1. Pour $k \in [0; 1]$ chercher la limite de $f_k(x)$ quand x tend vers 0, quand x tend vers l'infini; préciser les asymptotes à \mathcal{C}_k .
Faire la même étude (limites et asymptotes), pour $k = 0$.
2. Montrer que la fonction dérivée f'_k de f_k peut être définie par

$$f'_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{x^3}$$

$$\text{où } \varphi_k(x) = 1 - kx^3 - 2\text{Log } x.$$

Étudier les variations de φ_k . Montrer qu'il existe un réel unique α_k tel que

$$\varphi_k(\alpha_k) = 0$$

Montrer de plus que

$$1 \leq \alpha_k \leq \sqrt{e}$$

Déduire de l'étude de φ_k le tableau de variations de φ_k .

Donner une expression de $f_k(\alpha_k)$ ne contenant pas de logarithme.

3. Écrire l'équation de la tangente D_k à \mathcal{C}_k au point $M[x_0; f_k(x_0)]$.

Montrer que pour x_0 fixé et k décrivant l'intervalle $[0; 1]$, il existe un point dont les coordonnées sont indépendantes de k et qui appartient à toutes les droites D_k .

4. a. Construire \mathcal{C}_0

b. Soit h un réel tel que $h > 1$; en utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire $S(h)$ de l'ensemble des points $M(x; y)$ de \mathcal{P} tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq h \\ 0 \leq y \leq f_0(x) \end{cases}$$

Quelle est la limite de $S(h)$ quand h tend vers l'infini?

N. B. : La quatrième question peut se traiter indépendamment des questions précédentes.