Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Reims

EXERCICE 1

1. Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n.
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre

$$N = 22^{9n+2} - 31^{3n-1} \text{ est divisible par 9.}$$

EXERCICE 2

On désigne par P un plan affine rapporté à un repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit S_α la transformation qui, à un point M de P, de coordonnées $(x\,;\ y)$, fait correspondre le point M_1 dont les coordonnées $\left(x_1\,;\ y_1\right)$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

1. Trouver les valeurs de α pour lesquelles S_α n'est pas bijectif et déterminer, pour chacune de ces valeurs, l'image de S_α ainsi que l'ensemble des points M pour lesquels $S_\alpha(M) = \text{O}$.
2. M étant fixé, distinct de O, déterminer l'ensemble E des points M_1 transformés de M par S_α lorsque le paramètre α décrit $\mathbb{R}$.
   Comment faut-il choisir M pour que E contienne le point O.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{1}{\text{Log}\, x} \text{ pour } x \text{ strictement positif et distinct de } 1 \\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Étudier f : continuité, dérivabilité, sens de variation, représentation dans un repère orthonormé. (On précisera la demi-tangente à l'origine O du repère, en étudiant la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives).

2. On pose,

pour $\quad 0 \leqslant x < 1 \quad F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

et, pour $\quad x > 1 \quad G(x) = \displaystyle\int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Que vaut $F'(x)$? Que vaut $G'(x)$?

(On ne cherchera pas à calculer des expressions de $F(x)$ et de $G(x)$).

Dire pourquoi on n'a pas le droite d'écrire $F'(x) = G'(x)$.

Partie B

On pose, pour x strictement positif et distinct de 1 :

$$H(x) = \int_{x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

f étant la fonction définie dans A.

1. **a.** Montrer que $H(x)$ est toujours positif ou nul.

b. Montrer que $H(x)$ s'exprime, suivant les cas, à l'aide de la fonction F ou à l'aide de la fonction G.

En déduire l'expression de $H'(x)$ pour $0 < x < 1$, puis pour $x > 1$

c. Soit φ une fonction numérique définie et continue sur $[0\,;\,1[$.

Établir que $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. (On pourra désigner par Φ une primitive de φ).

En déduire la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

2. On pose, pour x strictement positif et distinct de 1 :

$$K(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\,\mathrm{Log}\,t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Calculer la dérivée de la fonction qui, à x strictement positif et distinct de 1, fait correspondre $\mathrm{Log}\,|\mathrm{Log}\,x|$.

En déduire que $K(x)$, qu'on calculera, garde une valeur constante, qu'on précisera, quand x varie dans $]0\,;\,1[$ et dans $]1\,;\,+\infty[$.

b. On pose pour x strictement positif et distinct de 1 :

$$\varphi_1(x) = \frac{x-1}{x\,\mathrm{Log}\,x}$$

Montrer que $\varphi_1(x)$ tend vers une limite ℓ, qu'on précisera, lorsque x tend vers 1. (On pourra poser $x = 1 + X$).

Soit alors $\overline{\varphi_1}$ la fonction définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overline{\varphi_1}(x) & = & \varphi_1 \quad \text{pour } x \text{ strictement positif et distinct de } 1.\\ \overline{\varphi_1}(1) & = & \ell\end{array}\right.$$

En s'inspirant de B 1. c. , montrer que

$$\int_x^{x^2} \overline{\varphi_1}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{tend vers 0 quand } x \text{ tend vers 1.}$$

c. Montrer que $H(x) - K(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1.

En déduire qu'on peut définir à partir de H une fonction à valeurs réelles $\overline{H}$, définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$, coïncidant avec H sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

3. a. Montrer que, quel que soit $x > 0$, $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - x}{2\operatorname{Log} x} \leqslant \overline{H}(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\operatorname{Log} x}$$

b. En déduire la limite de $\overline{H}(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

c. En déduire également les limites de $\overline{H}(x)$ et de $\dfrac{\overline{H}(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Rassemblant les résultats des trois questions de B, étudier les variations de $\overline{H}$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(On précisera la demi-tangente à l'origine O du repère ; par ailleurs, en admettant que la dérivée de $\overline{H}$ existe au point $x = 1$, et que

$\overline{H}'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \overline{H}'(x)$, on précisera la tangente au point d'abscisse 1).