

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Reims juin 1976 ∞

EXERCICE 1

On pose

$$I(a, n) = \int_0^1 x^a (1-x)^n dx, \quad a \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et} \quad I(a, 0) = \int_0^1 x^a dx.$$

1. En intégrant par parties, montrer que

$$I(a+1, n) = \frac{a+1}{n+1} I(a, n+1)$$

2. Établir que  $I(a, n) - I(a, n+1) = I(a+1, n)$ .

En déduire que

$$I(a, n+1) = \frac{n+1}{n+a+2} I(a, n)$$

3.  $a$  étant fixé, ( $a \in \mathbb{N}^*$ ), calculer  $I(a, 0)$  et démontrer par récurrence sur  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$I(a, n) = \frac{1.2.3 \dots (n-1).n}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}$$

EXERCICE 2

En base 9, trouver tous les couples de chiffres  $(x ; y)$  pour lesquels le nombre  $\overline{7x6y4}$  est divisible par 7 et par 8.

(On pourra utiliser le système décimal comme intermédiaire).

PROBLÈME

Soit  $P$  un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

Partie A

On donne un point  $\Omega$  de  $P$  et un nombre réel  $k$  strictement positif. Soit  $f$  l'application de  $P - \{\Omega\}$  dans  $P - \{\Omega\}$  définie par :

$$m \mapsto M = f(m) \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega m}\|^2} \cdot \overrightarrow{\Omega m}.$$

1. Établir que  $\left\| \overrightarrow{\Omega M} \right\| = \frac{k}{\left\| \overrightarrow{\Omega m} \right\|}$  et que  $f$  est une application involutive de  $P - \{\Omega\}$  dans  $P - \{\Omega\}$ .
2. a. Quelle est l'image par  $f$  du cercle  $\Gamma$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $\sqrt{k}$ ?  
b. Quel est l'ensemble des points invariants par  $f$ ?  $f$  est-elle une application affine?
3.  $P$  est considéré comme plan complexe. Tout point  $m(x; y)$  de  $P$  a pour affixe  $z = x + iy$ ; on note  $\alpha$  l'affixe de  $\Omega$  et  $Z$  l'affixe de  $M$ , image de  $m$  par  $f$ .  
Établir la relation (1)  $Z = \alpha + \frac{k}{\overline{z - \alpha}}$ .  
( $\overline{z - \alpha}$  désigne le conjugué de  $z - \alpha$ )

### Partie B

On appelle  $f'$  l'application associée à la relation  $Z - 1 = \frac{k}{\overline{z - 1}}$  et  $f_1$  celle associée à la relation  $Z - 1 - b = \frac{b\overline{b}}{\overline{z - 1 - b}}$  où  $b$  et  $\overline{b}$  sont deux nombres complexes conjugués ( $b \neq 0$ ).

1. a. Sur quel ensemble  $E_1$  la composée

$$\varphi_1 = f' \circ (f_1 \circ f')$$

est-elle définie?

- b. Établir la relation entre les affixes de  $m$  et de son image par  $f_1 \circ f'$ , en déduire que la relation entre les affixes de  $m$  et de son image  $M_1$  par  $\varphi_1$  est

$$(2) \quad Z_1 = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}} \overline{z}.$$

2. On pose désormais  $k = \sin^2 \theta$  et  $b = \frac{\sin \theta}{2} (-\sin \theta + i \cos \theta)$ .
- a. En utilisant la relation (2), montrer que  $\varphi_1$  est alors la restriction à  $E_1$  d'une symétrie orthogonale  $S_1$  par rapport à une droite  $\Delta_1$  passant par  $O$ . On appelle  $D$  la droite  $(O, \vec{u})$ , déterminer l'angle  $(D, \Delta_1)$ .
- b. On appelle  $f_2$  l'application associée à la relation

$$Z - 1 - \overline{b} = \frac{b\overline{b}}{\overline{z - 1 - \overline{b}}}$$

et  $\varphi_2$  la composée  $\varphi_2 = f' \circ (f_2 \circ f')$ .

Montrer sans nouveaux calculs que  $\varphi_2$  est aussi la restriction à un ensemble  $E_2$  d'une symétrie orthogonale  $S_2$  par rapport à une droite  $\Delta_2$  que l'on précisera.

- c. Prouver l'identité de  $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$  et de  $R$  où  $R$  désigne la restriction de  $S_2 \circ S_1$  à une partie  $P'$  de  $P$  que l'on précisera.

Préciser la nature de cette application  $R$ .

Quelles valeurs doit-on donner à  $\theta$  pour que  $R$  soit associée à la relation

$$Z = z \left( \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right)?$$

3. Soit les applications définies dans  $E' = P - \{O\}$  par

$$f'_1 : x \mapsto \frac{1}{\bar{z}}, \quad f'_2 : x \mapsto \frac{1-k}{\bar{z}}.$$

a. Montrer que la composée  $h = f'_2 \circ f'_1$  est la restriction à  $E'$  d'une homothétie que l'on précisera.

b. Quel est l'ensemble de définition de  $h \circ R$ ?

Montrer que l'application  $h \circ R$  est associée à la relation

$$(3) \quad Z = (1-k) \left( \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) z$$

pour un choix convenable de  $R$ .

4. On appelle  $u$  l'application de  $P$  dans  $P$  associée à la relation (3).

Déterminer la nature de  $u$  et ses éléments remarquables; discuter selon les valeurs de  $\theta$ .