

Baccalauréat C Reims juin 1977

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} f(x) = x e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \operatorname{Log} x - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f .
2. Étudier la dérivabilité de f .
3. Étudier complètement la fonction f et construire sa représentation graphique dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm).

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé, on appelle affixe de tout point M de coordonnées $(x; y)$ le nombre complexe $z = x + iy$, et l'on pose $\bar{z} = x - iy$.

1. Déterminer l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie la relation

$$|2i\bar{z} - 1 - i| = \sqrt{2}.$$

2. Soit T l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$.
 - a. Montrer que T admet un point invariant Ω unique.
 - b. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$.
 - c. Indiquer alors la nature et les éléments géométriques précis de l'application T .
3. Utiliser la question 2. pour retrouver les résultats de la question 1. par une méthode géométrique.

PROBLÈME

12 POINTS

Etant donné un espace vectoriel \mathcal{E} de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on note $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de \mathcal{E} . Soit f et $f_{a,b}$ les éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ définis par

$$f \begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{i} + \vec{k}) \\ f(\vec{j}) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{i} + \vec{k}) \\ f(\vec{k}) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{i} + \vec{k}) \end{cases} \quad f_{a,b} \begin{cases} f_{a,b}(\vec{i}) = \left(\frac{a}{3} + b\right)\vec{i} + \frac{a}{3}\vec{j} + \frac{a}{3}\vec{k} \\ f_{a,b}(\vec{j}) = \frac{a}{3}\vec{i} + \left(\frac{a}{3} + b\right)\vec{j} + \frac{a}{3}\vec{k} \\ f_{a,b}(\vec{k}) = \frac{a}{3}\vec{i} + \frac{a}{3}\vec{j} + \left(\frac{a}{3} + b\right)\vec{k} \end{cases}$$

L'application $\begin{array}{c} \mathcal{E} \\ \vec{u} \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{E} \\ \vec{u} \end{array}$ sera notée e ,

l'application $\begin{array}{c} \mathcal{E} \\ \vec{u} \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{E} \\ 0 \end{array}$ sera notée θ .

Partie A

1. Déterminer le noyau, l'image et l'ensemble des vecteurs invariants par f . En déduire que f est une projection que l'on caractérisera. Montrer que $f \circ f = f$.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{F} des endomorphismes de \mathbb{C} du type $f_{a,b}$ lorsque a et b décrivent \mathbb{R} , est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et que (f, e) est une base de \mathcal{F} . Comment s'écrit $f_{a,b}$ dans cette base?
3. Montrer que \mathcal{F} , muni de l'addition des applications et de la composition (notée \circ) des applications, est un anneau unitaire. Cet anneau est-il commutatif? Cet anneau est-il un corps? (On rappelle que $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, muni de l'addition et de la composition, est un anneau unitaire).
4. Soit $\varphi = \alpha f + \beta e$ un élément de \mathcal{F} . On pose

$$\varphi = \varphi^1 \quad \text{et} \quad \varphi^n \circ \varphi = \varphi^{n+1} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = [(\alpha + \beta)^n - \beta^n] f + \beta^n e.$$

5. Déterminer les éléments de \mathcal{F} qui sont involutifs. Préciser la nature et les éléments de ces involutions.

Partie B

On suppose dans cette partie que \mathcal{E} est un espace vectoriel euclidien, que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en est une base orthonormée, et que E est un espace affine de repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit O' le point de E de coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

Soit s l'application affine de E dont l'endomorphisme associé est $f_{-2, 1}$ et telle que $s(O) = O'$.

1. Déterminer l'image par s du point I de E de coordonnées $(1; -1; 1)$.
2. Montrer que s est une isométrie involutive dont on précisera la nature et les éléments géométriques.
3. Soit Q le plan affine d'équation $2x - y - z + 3 = 0$. Déterminer l'image de Q par s .
(Pour déterminer l'image de Q par s on pourra définir sa position par rapport aux éléments de s ou employer une méthode analytique).