

♣ Baccalauréat C Reims juin 1981 ♣

EXERCICE 1

Soit \mathcal{V} un espace vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit \mathcal{E} un espace affine euclidien, associé à \mathcal{V} , et rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à tout point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$ tel que

$$\begin{cases} x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + 1 \\ z' &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est un vissage. Préciser son axe.
2. Soit φ l'endomorphisme associé à f . Calculer $(\varphi \circ \varphi)(\vec{i})$.
Quel renseignement, relatif à l'angle de f , peut-on en déduire?
3. Soit P le plan affine d'équation $y + z - 2 = 0$.
Déterminer $f(P)$.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$6x - 13y = 5.$$

2. En déduire la solution générale, dans \mathbb{Z} , du système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{13}. \end{cases}$$

3. Donner la solution générale, dans \mathbb{Z} , du système de congruence

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{13}. \\ x \equiv 1 \pmod{7}. \end{cases}$$

PROBLÈME

On désigne par \mathcal{C} l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions numériques de la variable réelle définies et continues sur \mathbb{R} .

À tout élément f de \mathcal{C} on associe la fonction \tilde{f} telle que

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt,$$

pour tout réel x .

Partie A

1. Montrer que, pour toute primitive F de f sur \mathbb{R} , on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1)).$$

2. Calculer \tilde{f} lorsque f est la fonction définie par $f(t) = t^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Montrer que pour toute fonction polynôme f sur \mathbb{R} est une fonction polynôme de même degré.
3. Calculer \tilde{f} lorsque f est la fonction définie par $f(t) = |t|$ (pour le calcul de $\tilde{f}(x)$, on étudiera séparément les cas $x \leq -1$, $-1 < x < 1$, $x \geq 1$). Tracer dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives de f et de \tilde{f} lorsque $f(t) = |t|$.

Partie B

1. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{E}$, la fonction \tilde{f} est continue et dérivable sur \mathbb{R} , et que

$$(\tilde{f})'(x) = \frac{1}{2}[(x+1) - f(x-1)],$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que \tilde{f} est une fonction croissante si, et seulement si, f est une fonction périodique admettant le nombre réel 2 pour période.

Partie C

1. On suppose f croissance sur \mathbb{R} . Montrer qu'il en est de même de \tilde{f} . Montrer que, pour tout réel x , on a

$$f(x-1) \leq \tilde{f}(x) \leq f(x+1).$$

En déduire que si $\lim_{-\infty} f = +\infty$, alors $\lim_{+\infty} \tilde{f} = +\infty$, et que si $\lim_{-\infty} f = 0$, alors $\lim_{+\infty} \tilde{f} = 0$

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \frac{4e^t}{t^2 + 4}.$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

Donner le tableau de variations de f . En déduire celui de \tilde{f} .