

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Reims ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n + 2$ divise $2n - 1$.
2. Montrer que pour tout entier relatif, les nombres $n + 2$ et $2n^2 + 3n - 1$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

EXERCICE 2

4 points

1. Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$$

dans l'ensemble des nombres complexes.

2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3. Dédire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

PROBLÈME

12 points

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) . On munit l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E de sa structure usuelle d'espace vectoriel. Pour chaque endomorphisme f de E , on note $M(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) et $T(f)$ le réel $a + d$. L'application identique de E sera notée Id .

On appelle F l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $M(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec (a, b, d) réels quelconques.

Partie A

On note f_1, f_2, f_3 les endomorphismes de E de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ respectivement dans la base } (\vec{i}, \vec{j}).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de base (f_1, f_2, f_3) .
2. Trouver deux éléments f et g de F tels que $g \circ f$ ne soit pas dans F .

3. Montrer qu'il existe un endomorphisme r de F , et un seul, vérifiant

$$\begin{cases} r(f_1) &= \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3) \\ r(f_2) &= f_1 - f_3 \\ r(f_3) &= \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3). \end{cases}$$

Soit un élément f de F tel que $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$; calculer (en fonction de a, b, d) $M(f')$ où $f' = r(f)$.

Partie B

Soit t la restriction de T à E .

1. Montrer que t est une application linéaire de F dans \mathbb{R} .
2. Montrer que le noyau de t , noté $\text{Ker } t$ est un plan vectoriel de F contenant toutes les symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles de E .
3. Pour tout vecteur \vec{u} non nul de E , on note $S_{\vec{u}}$; la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base \vec{u} .

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de E et soit α la mesure de l'angle du couple (\vec{u}, \vec{v}) .

Quelle est la nature de la transformation $R = S_{\vec{v}} \circ S_{\vec{u}}$?

Calculer $T(R)$ en fonction de α .

Partie C

Soit $\varphi : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(f, g) = T(g \circ f)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur F .
2. a. Calculer $\varphi(f, \text{Id})$ pour tout $f \in F$.
b. En déduire l'orthogonal de $\text{Ker } t$ pour φ .
3. On reprend l'endomorphisme r de F défini à la question 3. de la première partie.
 - a. Montrer que r est une isométrie vectorielle de F pour le produit scalaire φ .
 - b. Calculer $r(\text{Id})$ et en déduire que $r(\text{Ker } t) = \text{Ker } t$.
 - c. Calculer $\varphi(f, r(f))$ pour tout f élément de $\text{Ker } t$.
 - d. En déduire que r est une rotation de F . Que peut-on dire de son angle ?