

♣ Baccalauréat C Reims juin 1983 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application T de P dans P qui, à chaque point M d'affixe z , associe la point M' d'affixe z'
 $z' = -i\bar{z} + 2 + 2i$.
2. Soit H le milieu du segment $[MM']$. Exprimer l'affixe de H en fonction de l'affixe z de M et de \bar{z} ; en déduire, toujours en fonction de z et \bar{z} , la distance de M à H .
3. Préciser la nature et les caractéristiques géométriques de l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie :

$$|z + 1 + i| = \frac{1}{2} |z + i\bar{z} - 2 - 2i|.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan affine euclidien P , on donne le triangle ABC rectangle en A et isocèle avec $AB = AC = a$, où a est un réel donné strictement positif.

1. a. Déterminer et construire la barycentre G du système $\{(A, 4)(B, -1)(C, 1)\}$.
b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2a^2.$$

2. \mathcal{P} est le plan vectoriel associé à P .

a. Soit $\vec{f} : P \rightarrow \mathcal{P}$
 $M \mapsto 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$.

Montrer que \vec{f} est une fonction constante que l'on précisera.

- b. Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Étant donné un entier supérieur ou égal à 1, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

et on considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + \dots + x^{2n-2} - x^{2n-1}.$$

1. Montrer que $f(x)$ est la somme des $2n$ premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Dire pourquoi $f(x)$ est intégrale sur $[0 ; 1]$ et montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx = u_n.$$

3. Vérifier que, pour $x \neq -1$, $f(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.

4. En déduire que

$$u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = \ln 2.$$

5. Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx.$$

6. Calculer $\int_0^1 x^{2n} dx$, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$.

7. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie B

On considère les fonctions numériques F , G , H définies sur $[0 ; 1]$ par :

$$F(x) = \ln(1+x), \quad G(x) = x - F(x), \quad H(x) = F(x) - x + x^2.$$

1. Étudier les variations de G et H sur $[0 ; 1]$. En déduire le signe de G et de H sur $[0 ; 1]$.
2. Montrer que $x - x^2 \leq F(x) \leq x$ pour tout $x \in [0 ; 1]$.
3. Étant donné un entier $k \geq 0$ et un entier $n \geq 1$, montrer que

$$\frac{1}{n+k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{n+k}.$$

4. On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = F\left(\frac{1}{n}\right) + F\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + F\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\text{et } a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Montrer que $\left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n \leq v_n \leq a_n$.

5. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = a_n - \frac{1}{n}$.

Calculer $b_n - b_{n-1}$ (pour $n \geq 2$), puis comparer b_n au réel u_n défini dans la partie A (pour $n \geq 1$).

6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Partie C

On considère la fonction numérique S définie sur $[0 ; 1]$ par $S(x) = \sin(x)$ et la suite

$$w_n = S\left(\frac{1}{n}\right) + S\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + S\left(\frac{1}{2n}\right) \quad (\text{définie pour tout entier } \geq 1).$$

1. Montrer que $x - x^2 \leq S(x) \leq x$ pour tout $x \in [0 ; 1]$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.