Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Reims–Nancy– Strasbourg septembre 1969 ∽

EXERCICE 1

Étant donné un nombre réel, u, appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ +\pi[$, résoudre l'équation suivante, dans l'ensemble des nombres complexes :

$$(E) \qquad z^2 - 2z(\cos u + \mathrm{i}\sin u) + 2\mathrm{i}\sin u(\cos u + \mathrm{i}\sin u) = 0.$$

Déterminer, suivant la valeur donnée à u, les modules, ρ_1 et ρ_2 et les arguments, θ_1 et θ_2, des racines, z_1 et z_2 de (E).

EXERCICE 2

On considère, dans le plan euclidien, un rectangle ABCD dans lequel les côtés AB et CD ont pour mesure $2a$ et les côtés BC et DA ont pour mesure a.
Construire les images des segments de droite AB, BC, CD, DA, AC, BD et du cercle circonscrit au rectangle ABCD, par l'inversion de pôle A et de puissance $2a^2$.
(On tracera sur une même figure le rectangle et son cercle circonscrit en traits pointillés et leurs images en traits pleins. On précisera, en fonction de a, la position des points nécessaires à la construction.)

PROBLÈME

Première partie

1. On définit la suite (u_n) par son premier terme, $u_0 = 0$, et la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n+1}.$$

- **a.** Calculer u_n pour $n \leqslant 5$.
- **b.** Représenter, en repère orthonormé, les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée u_n pour $n \leqslant 5$.
- **c.** Calculer les aires des triangles $A_0A_1A_2$ et $A_3A_4A_5$ (on pourra utiliser la médiane parallèle à $y'y$).

2. Étudier la suite

$$u_0,\ u_2,\ \ldots,\ u_{2k}$$

En déduire l'expression de u_{2k} et u_{2k+1} et montrer que u_{2k} et u_{2k-1} sont opposés.

3. Représenter, en repère orthonormé, les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée u_n pour n quelconque.
Calculer, en fonction de n, l'aire du triangle $A_{n-1}A_nA_{n+1}$.

Deuxième partie.

Soit f la fonction définie, pour x positif ou nul, par

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4}\cos nx.$$

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer qu'elle a même signe, pour $0 < x < 1$, que

$$g(x) = 1 + 2x - \frac{2}{\pi}\operatorname{cotg}\pi x.$$

Démontrer, à l'aide de la dérivée de $g(x)$, qu'il existe un nombre α_0 $\left(0 < x_0 < \dfrac{1}{2}\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcll} f'(\alpha_0) & = & 0, & \\ f'(x) & < & 0 & \text{pour } 0 < x < \alpha_0, \\ f'(x) & > & 0 & \text{pour } \alpha_0 < x < 1. \end{array}\right.$$

(On ne demande pas de calculer α_0)

2. Pour l'étude de la courbe (C) r ion f dans un repère orthonormé, on admettra, dans la suite, que, pour tout entier n, $f'(x)$ s'annule en un seul point, α_n, de l'intervalle $]n\,;\, n+1[$, que ce point α_n est contenu dans l'intervalle $\left]n\,;\, n+\dfrac{1}{2}\right[$, et que, de plus, si n est pair, $f(\alpha_n)$ est le minimum de f sur $]n\,;\, n+1]$ et, si n est impair, $f(\alpha_n)$ est le maximum de f sur $]n\,;\, n+1]$.

a. Étudier les points A_n de la courbe (C) dont l'abscisse est un nombre entier et déterminer la tangente à (C) en chacun de ces points.

En déduire le signe de $f(n)$ et montrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $]n\,;\, n+1[$.

b. À l'aide des renseignements précédents, donner l'allure de la courbe (C).

Troisième partie

1. Déterminer trois nombres réels, A, B et C, tels que la fonction F définie par

$$F(x) = Ax + B(2x+1)\sin\pi x + C\cos\pi x$$

ait pour dérivée (pour $x \geqslant 0$) la fonction f définie dans la deuxième partie.

2. Calculer, en fonction de l'entier n, l'aire du domaine compris entre l'arc $A_0A_1A_2$ de la courbe (C) et la corde A_0A_2 puis celle du domaine compris entre l'arc $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ de la courbe (C) et la corde $A_{n-1}A_{n+1}$.

On utilisera, suivant la parité de n, les primitives des fonctions $f(x) + \dfrac{x}{2}$ ou $\dfrac{x+1}{2} - f(x)$.

Comparer cette aire à celle du triangle $A_{n-1}A_nA_{n+1}$.