

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat C Rennes juin 1969 ❧

**EXERCICE 1**

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation en  $z$

$$iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0.$$

**EXERCICE 2**

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$ , définie par

$$f(x) = \sqrt{(2x - 2)(5 - x)}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction, et construire sa courbe représentative,  $(C)$ , dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
2. Reconnaître la nature de la courbe  $(C)$ . Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$  et l'axe  $x'Ox$ .

**PROBLÈME**

1. Dans le plan  $(\Omega)$  rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox, y'Oy$ , soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $x = 1$ .
  - a. Déterminer l'ensemble  $(\Delta_0)$  des points  $m$  de  $(\Omega)$  tels que, si  $m$  n'appartient pas à  $(\Delta_0)$  [(donc si  $m \in (\Omega) - (\Delta_0)$ ], il existe un point  $M$ , et un seul, symétrique de  $m$  par rapport au point de rencontre des droites  $Om$  et  $(\Delta)$ .
  - b. Déterminer la partie  $(\Omega_0)$  de  $(\Omega) - (\Delta_0)$  telle que l'application qui, à un point  $m$  de  $(\Omega_0)$ , fait correspondre le point  $M$  ainsi défini soit une transformation injective,  $\mathcal{T}$ , de  $(\Omega_0)$  dans  $(\Omega_0)$ . Montrer que  $\mathcal{T}$  est involutive.
  - c. Si  $m$  a pour coordonnées  $x$  et  $y$ , montrer que celles de  $M$  sont  $X$  et  $Y$  telles que

$$X = 2 - x \quad \text{et} \quad Y = \frac{y(2 - x)}{x}.$$

Dans la suite du problème, on confondra, dans le langage, une figure  $(\gamma)$  du plan  $(\Omega)$  et son intersection  $(\gamma_0)$  avec  $(\Omega_0)$ . En conséquence, si la transformée,  $(\Gamma_0)$ , de  $(\gamma_0)$  par  $\mathcal{T}$  est l'intersection avec  $(\Omega_0)$  d'une figure  $(\Gamma)$  de  $(\Omega)$ , on conviendra de dire que  $(\Gamma)$  est la transformée de  $(\gamma)$  par  $\mathcal{T}$ .

2. Déterminer analytiquement par son équation cartésienne et représenter graphiquement la transformée de chacune des figures suivantes :
  - a. la droite d'équation  $x = \lambda$ , où  $\lambda$  est un nombre réel donné non nul et différent de 2;

- b. la droite d'équation  $y = \mu$ , où  $\mu$  est un nombre réel donné non nul;
  - c. la droite d'équation  $y = \frac{x}{2} - 1$ ;
  - d. la parabole d'équation  $y = x^2$ . Montrer que, dans ce cas, il existe un déplacement permettant de passer de la courbe à sa transformée.
3. Soit  $(\Delta')$  la droite de  $(\Omega)$  d'équation  $x = 2$  et  $(\gamma)$  une courbe d'équation cartésienne  $y = f(x)$ , qui admet, en un point  $a$  d'abscisse  $u$  ( $u \neq 0$  et  $u \neq 2$ ), une tangente coupant  $(\Delta')$  en J.

Montrer que la courbe  $(\Gamma)$ , transformée de  $(\gamma)$  par  $\mathcal{T}$ , admet une tangente au point  $A = \mathcal{T}(a)$ .

En fonction des coordonnées de  $a$ ,  $u$  et  $v = f(u)$  et de la pente,  $w = f'(u)$ , de la tangente à  $(\Gamma)$  en  $a$ , écrire l'équation de la tangente à  $(\Gamma) = \mathcal{T}_{(\gamma)}$  en  $A = \mathcal{T}_{(a)}$  et calculer l'ordonnée,  $y_K$  de son point d'intersection, K, avec  $(\Delta')$ .

Montrer que le point I, intersection de OA avec  $(\Delta')$ , est le milieu de [JK].

*Application* – On prend comme courbe  $(\gamma)$  la droite d'équation  $y = \frac{x}{2} - 1$ , dont on a étudié la transformée,  $(\Gamma)$ , à la question 2. c.

$(\Gamma)$  a deux asymptotes. En utilisant le résultat que l'on vient de démontrer, retrouver une propriété connue de cette courbe particulière  $(\Gamma)$ , en l'occurrence :

A est le milieu du segment déterminé par les deux asymptotes sur la tangente à  $(\Gamma)$  en A.