ൠ Baccalauréat C Rennes juin 1971 ൠ

EXERCICE 1

Soit f la fonction qui associe, à tout nombre réel x, le nombre réel

$$f(x) = \left|\text{e}^{2x} - \text{e}^{x}\right| - 2.$$

1. Étudier les variations de f.

   La fonction f est-elle continue, dérivable pour la valeur 0 de la variable x ?

   Construire la représentation graphique (Γ) de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ (on prendra 2 centimètres comme unité de longueur).

2. (Γ) coupe l'axe $y'\text{O}y$ en A. Soit λ un nombre réel négatif et (D_λ) la droite d'équation $x = \lambda$.

   Exprimer, en centimètres carrés et en fonction de λ, l'aire S_λ de l'ensemble des points dont l'abscisse est comprise entre λ et 0 et qui sont situés entre (Γ) et la parallèle à $x'\text{O}x$ menée par A.

EXERCICE 2

Donner, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

Un entier A s'écrit 13 321 dans le système de numération de base quatre. Quel est le reste de la division de A par 7 ?

PROBLÈME

L'univers du problème est un plan euclidien (Π) rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.

a étant un nombre réel strictement positif, soit (C) le cercle de centre O et de rayon a.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des cercles du plan (Π) orthogonaux à (C) et de rayon non nul. (Γ) étant un élément de $\mathcal{G}$, on appelle ω son centre et (D) la polaire de O par rapport à (Γ) ; si P désigne un point de (C), la polaire de P par rapport à (Γ) est notée (Δ).

Partie A

Dans cette première partie, que l'on demande de traiter géométriquement, sans faire appel aux coordonnées, le point P est un point fixe de (C) et le cercle (Γ) un élément variable.

1. Quelle est l'image Ω de $\mathcal{G}$ par l'application de $\mathcal{G}$ dans (Π) qui à (Γ), élément de $\mathcal{G}$, fait correspondre son centre ω ? Cette application est-elle injective ?
2. Montrer qu'il existe un point fixe P′ de (Π) tel que, quel que soit le cercle (Γ), élément de $\mathcal{G}$, (Δ) passe par P′.

3. Si R est la relation définie sur $\mathcal{G}$ par (Γ) R (Γ') si, et seulement si, la polaire de P par rapport à (Γ') est la droite (Δ), polaire de P par rapport à (Γ), montrer que R est une relation d'équivalence.

   Caractériser, géométriquement, les classes d'équivalence définies dans $\mathcal{G}$ par R.

   [En d'autres termes, il est demandé, dans cette fin de question, de caractériser géométriquement un ensemble de cercles de (Π) orthogonaux à (C) et de rayon non nul tels que P ait même polaire par rapport à tous ces cercles.]

4. Soit (L) une droite de (Π) passant par P et recoupant (C) en un point B distinct de P. Ω étant la partie de (Π) définie au 1., à tout $\omega \in (L) \cap \Omega$ correspond un cercle (Γ) de centre ω ; soit M l'intersection de (D) avec (Δ) et H l'intersection de (D) avec la droite $(\mathrm{O}\omega)$.

   [On rappelle que (D) et (Δ) sont les polaires respectives de O et de P par rapport à (Γ).]

   a. Quelle est la polaire de M par rapport à (Γ) ?

   Quel est l'axe radical de (Γ) et du cercle circonscrit au triangle ωBM ?

   Montrer que le cercle circonscrit au triangle ωBM est un cercle (Γ') élément de $\mathcal{G}$.

   À tout $\omega \in (L) \cap \Omega$ correspond ainsi un point ω' de (Π), centre du cercle (Γ') circonscrit à ωBM ; quel est l'ensemble des points ω' correspondant aux points ω de $(L) \cap \Omega$?

   b. À l'aide d'une inversion de centre O, déterminer l'ensemble des points H lorsque ω décrit $(L) \cap \Omega$.

   c. Montrer que, quel que soit $\omega \in (L) \cap \Omega$, il existe un point fixe, K, de (Π) tel que (D) passe par K.

   Comment peut-on définir et construire simplement K à partir de (C) et de (L) ?

Partie B

Dans cette seconde partie, le point P est variable sur (C), mais le cercle (Γ) est le cercle fixe de $\mathcal{G}$ dont le centre ω a pour coordonnées $(2a\ ;\ 0)$.

1. Soit E et E$'$ les points d'intersection de (C) avec (Γ), E désignant celui qui a une ordonnée positive. Montrer que les droites (OE) et (OE$'$) ont pour équations respectives

$$y = \sqrt{3}x \quad et \quad y = -\sqrt{3}x.$$

2. Soit F et F$'$ les points d'intersection de la polaire (Δ) de P par rapport à (Γ) et des droites (OE) et (OE$'$) respectivement.

   Montrer, géométriquement, que la droite $(\omega\mathrm{F})$ est perpendiculaire à (PE) et $(\omega\mathrm{F}')$ à (PE$'$).

   Calculer la mesure de l'angle $(\omega\mathrm{F},\ \omega\mathrm{F}')$ et établir les égalités

$$(w\mathrm{O},\ w\mathrm{F}') = (\mathrm{FO},\ \mathrm{F}w) \quad \text{et} \quad \mathrm{OF} \cdot \mathrm{OF}' = 4a^2.$$

3. Si θ désigne l'angle du vecteur unitaire de Ox et de $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ et si $r = \mathrm{OP}$, les coordonnées de P s'écrivent $x = r\cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Calculer en fonction de θ les coordonnées de F et de F$'$, puis celles du milieu, I, du segment FF$'$.

Montrer que, lorsque P décrit (Γ), l'ensemble des points I correspondant, est une hyperbole, dont on précisera les éléments.