

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Rennes ∞

EXERCICE 1

Résoudre dans le corps des complexes l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - \sqrt{2}.z^2 + 1 = 0$$

EXERCICE 2

Dans une épreuve, l'espace des éventualités Ω comprend huit éléments notés a, b, c, d, e, f, g, h . Les ensembles $A = \{a, c, f, h\}$ et $B = \{b, c, f, g\}$ sont des évènements.

1. Trouver un ensemble \mathcal{E} de quatre évènements E_1, E_2, E_3, E_4 incompatibles (ou dis-joints) deux à deux et tels que :

$$A = E_1 \cup E_2, \quad B = E_1 \cup E_3, \quad \Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4.$$

On notera désormais $\langle 1, 4 \rangle$ l'ensemble des entiers $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Soit \mathcal{B} l'ensemble des parties de Ω tel que :

$$\emptyset \in \mathcal{B}, \quad \Omega \in \mathcal{B}, \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{B}$$

$$i \in \langle 1, 4 \rangle, \quad [E_i \in \mathcal{B}$$

$$\text{et } \forall i \in \langle 1, 4 \rangle, \forall j \in \langle 1, 4 \rangle, i \neq j, E_i \cup E_j \in \mathcal{B}.$$

Montrer que (Ω, \mathcal{B}) est un espace probabilisable.

3. On pose :

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Calculer $P(E_1), P(E_2), P(E_3), P(E_4)$.

Montrer que la probabilité P est parfaitement définie sur (Ω, \mathcal{B}) .

4. Soit X la variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{B}, P) telle que :

$$X(a) = 2, \quad X(b) = 3, \quad X(c) = -1, \quad X(d)$$

Quelles sont les valeurs $X(e), X(f), X(g), X(h)$? Quelle est la loi de X ? Quelle est sa fonction de répartition? Trouver l'espérance mathématique et la variance de X .

PROBLÈME**Les parties A - et B - sont indépendantes****Partie A**

Dans cette première partie, E_2 est un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de E_2 ; P est un plan affine (euclidien) attaché à E_2 .

On dira qu'un endomorphisme φ de E_2 possède la propriété (p) s'il existe un réel $k \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall \vec{v} \in E_2, \quad \|\varphi(\vec{v})\| \leq k \|\vec{v}\|$$

1. a. Donner un exemple simple d'endomorphisme de E_2 , autre que l'application nulle possédant la propriété (p).
- b. Si φ et ψ possèdent la propriété (p), en est-il de même pour $\psi \circ \varphi$?
L'ensemble des endomorphismes bijectifs de E_2 possédant la propriété (p) est-il un sous-groupe du groupe linéaire de E_2 ?
- c. Montrer que si φ vérifie la propriété (p) et si Id désigne l'application identique de E_2 dans E_2 , $\varphi - \text{Id}$ est un endomorphisme bijectif de E_2 .

2. a. φ étant un endomorphisme de E_2 et k un réel positif, montrer qu'il y a équivalence entre :

$$(i) \quad \forall \vec{v} \in E_2, \quad \|\varphi(\vec{v})\| \leq \|\vec{v}\|$$

$$(ii) \quad \forall \vec{v} \in E_2, \quad \|\vec{v}\| = 1 \implies \|\varphi(\vec{v})\| \leq k \|\vec{v}\|$$

- b. Soit φ_0 l'endomorphisme de E_2 , dont la matrice dans \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On se propose de montrer que φ_0 possède la propriété (p).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\vec{v}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$.

On pose $F(\theta) = \|\varphi_0(\vec{v}(\theta))\|^2$.

Écrire $F(\theta)$ sous la forme : $A + B \sin^2 \theta + C \sin \theta \cos \theta$ avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$; en déduire que $F(\theta) < \frac{3}{4}$, puis que φ_0 vérifie la propriété (p).

3. Soit f une application affine de P dans P dont l'endomorphisme associé φ possède la propriété (p).

- a. Montrer qu'il existe au plus un point P invariant pour f .

A étant un point donné de P , montrer qu'il existe dans P un point unique Ω tel que :

$$\varphi(\overrightarrow{A\Omega}) - \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{f(A)A}$$

En déduire que Ω est invariant par f et que :

$$\forall M \in P, \quad \overrightarrow{\Omega f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$$

- b.** Soit $M_0 \in P$. On définit la suite de points M_n de P pour $n \geq 1$ par $M_n = f(M_{n-1})$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = 0$
($x_n; y_n$) étant les coordonnées de M_n dans le repère (O, \mathcal{B}) , que peut-on dire des deux suites de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- c.** Si f_0 est l'application affine de P dans P telle que $f_0(O)$ ait pour coordonnées $(1; -2)$ dans le repère (O, \mathcal{B}) et que l'endomorphisme associé soit φ_0 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, trouver les coordonnées dans (O, \mathcal{B}) du point Ω invariant par f .
- d.** Appliquer ce qui précède à l'étude des deux suites de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes, x_0 et y_0 et par les relations de récurrence :

$$n \geq 1 \quad \begin{cases} x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-1} + 1 \\ y_n = \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-1} - 2 \end{cases}$$

Partie B

- 1. a.** À tout réel x appartenant à l'intervalle $I = [1; +\infty[$ on fait correspondre le nombre $\text{Log } x + 2$.
Montrer que $x \in I$ entraîne $(\text{Log } x + 2) \in I$.
Soit f l'application de I dans I telle que $f(x) = \text{Log } x + 2$.
- b.** On pose $\varphi(x) = f(x) - x$.
Étudier le sens de variation de φ . En déduire que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique x_0 dans $I = [1; +\infty[$.
Résoudre dans cet intervalle les inéquations : $f(x) > x$ et $f(x) < x$.
- 2. a.** Soit a un réel tel que $a \in]1; x_0[$ et soit $J = [a; +\infty[$.
Montrer que $f(J) \subset J$ et que : $\forall x \in J, |f'(x)| \leq \frac{1}{a}$.
- b.** Montrer que :
 $\forall x_1 \in J, \forall x_2 \in J, |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{a} |x_1 - x_2|$.
Pour ce faire on pourra utiliser le fait que si deux fonctions g et h sont intégrables sur $[\alpha; \beta]$ où $\alpha < \beta$ et si, $\forall x \in [\alpha; \beta], g(x) \leq h(x)$, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx$$

- 3.** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n > 1, \quad u_n = \text{Log } u_{n-1} + 2$$

u_0 étant un réel supérieur ou égal à a , $a \in]1; x_0[$.

- a.** Montrer que si $u_0 > x_0$ tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à x_0 , et la suite (u_n) est décroissante.

Cas où $u_0 = x_0$.

- b.** Montrer que, dans tous les cas, on a :

$$\forall n > 1, \quad |u_n - x_0| \leq \frac{1}{a} |u_{n-1} - x_0|.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.