

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Rennes juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Le symbole Log désignant la fonction logarithme népérien, soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x - 1 - (e^x - 1) \cdot \text{Log} |e^x - 1| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative \mathcal{C} relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation.

$$143x - 100y = 1$$

en remarquant que $(7; 10)$ est solution.

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels p tels que :

$$10^{6p} + 10^{3p} - 2 = 0 \quad (143)$$

PROBLÈME

Soit P un plan affine, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère de P .

D_1 et D'_1 les droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs \vec{i} et \vec{j} .

D_2 et D'_2 les droites passant par O et dont les coefficients directeurs respectifs sont les réels distincts m et m' .

On dit qu'une application affine f de P dans P échange deux droites D et D' si et seulement si

$$f(D) = D' \quad \text{et} \quad f(D') = D.$$

Partie A

On désigne par :

- S_1 la symétrie affine par rapport à D_1 parallèlement à D'_1
- S'_1 la symétrie affine par rapport à D'_1 parallèlement à D_1
- S_2 la symétrie affine par rapport à D_2 parallèlement à D'_2

S'_2 la symétrie affine par rapport à D'_2 parallèlement à D_2

S_O la symétrie de centre O

I_d l'application identique dans P.

1. Soit E l'ensemble ayant pour éléments : I_d, S_O, S_1, S'_1 .
Démontrer que E muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m et m' , pour que la transformée de D_2 par S_1 soit D'_2 .
Montrer qu'alors S_1 et S'_1 échangent D_2 et D'_2 et vérifier (par exemple par un calcul) que S_2 et S'_2 échangent D_1 et D'_1 .

Partie B

1. Soit S une symétrie affine échangeant D_1 et D'_1 .
Quelle est l'image de O par S?
Démontrer qu'il existe un réel a non nul tel que pour tout point $M(x; y)$ de P son image $M'(x'; y')$ par S soit définie par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{a}y \\ y' &= ax \end{cases}$$

Démontrer que S échange D_2 et D'_2 si et seulement si : $mm' = a^2$.

2. Montrer que si m et m' sont non nuls et de même signe, il existe deux symétries affines et deux seulement, L et L' , qui échangent D_1 et D'_1 d'une part, D_2 et D'_2 d'autre part.
Montrer que : $L \circ L' = L' \circ L = S_O$.

Partie C

On suppose dans cette partie que : $m' > m > 0$

On désigne toujours par L et L' les symétries échangeant D_1 et D'_1 d'une part, D_2 et D'_2 d'autre part.

1. En utilisant B 2. et un repère convenable, démontrer qu'il existe deux symétries affines et deux seulement, Σ et Σ' , qui échangent D_1 et D_2 d'une part, D'_1 et D'_2 d'autre part.
On appellera Δ l'axe de Σ , Δ' l'axe de Σ' .
2. On pose :

$$T = L \circ \Sigma \circ L$$

- a. Démontrer que T est la symétrie par rapport à la droite $L(\Delta)$ (transformée de Δ par L) parallèlement à la droite $L(\Delta')$ (transformée de Δ' par L).
- b. Quelles sont les images par T des droites D_1 et D'_1 ?
- c. Démontrer que L échange Δ et Δ' .