∽ Baccalauréat C Rennes juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Un plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé direct.
Le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe du point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ de ce plan. $\overline{z}$ est le conjugué de z.

1. Déterminer la nature et les éléments de chacune des applications S_1 et S_2 de P dans P qui associent au point M d'affixe z respectivement les points $S_1(M)$ d'affixe $z_1 = \mathrm{i}\overline{z}$ et $S(M)$ d'affixe $z_2 = 2\mathrm{i}z + 5\mathrm{i}$.
2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan pour lesquels la distance des points $S_1(M)$ et $S_2(M)$ est égale à 1.
   Préciser la nature et les éléments de symétrie de E.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Soit $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \left\{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5},\ \dot{6}\right\}$.

1. a désignant un paramètre, élément de K, résoudre et discuter dans K l'équation en x : $\quad x^2 = a$.
   Montrer que l'équation $x2 + \dot{2}px + q = \dot{0}$, où p et q sont deux éléments de K, admet deux racines distinctes ou confondues dans K si et seulement si $\delta = p^2 - q$ appartient à un sous-ensemble G de K.
2. Résoudre dans K les équations en x :
   a. $x^4 - \dot{5}x + \dot{6} = \dot{0}$.
   b. $x^3 + x - \dot{2} = \dot{0}$.
   (On remarquera que cette dernière équation admet la solution $x = \dot{1}$).

PROBLÈME **14 POINTS**

Partie A

$\mathscr{P}$ est un plan affine rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. O$x$ et Oy sont les droites affines passant par O et admettant pour vecteur directeur respectivement $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$.
a, b, c étant trois réels donnés, T est l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le point $M' = T(M)$ de coordonnées $\left(x' = x, \quad y' = ax + by + c\right)$.

1. Quelle est la nature de T dans les cas particuliers suivants :
   a. $a = c = 0, \quad b = 1$
   b. $a = 0, \quad b = 1, \quad c \neq 0$
   c. $b = 0$

2. Écrire la matrice de l'application linéaire associée à T dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\imath}\right)$.

   À quelle condition doivent satisfaire les réels a, b, c pour que T soit bijective ?

   À quelle condition doivent satisfaire les réels a, b, c pour que T soit involutive ?

   Quelle est la nature de la transformation T lorsque $b = -1$?

   Déterminer l'ensemble I des points de $\mathscr{P}$ invariants par T.

   Discuter la nature de I suivant les paramètres $(a,\ b,\ c)$.

3. On suppose que les réels a, b, c sont tels que T est bijective et que l'ensemble I des points invariants est une droite. Soit M_0 un point de $\mathscr{P}$ n'appartenant pas à I, $M'_0 = T\left(M_0\right)$, M un point de $\mathscr{P}$ tel que la droite (M_0M) n'est pas parallèle à Oy et $M' = T(M)$.

   Montrer que les trois droites I, (M_0M) et $\left(M'_0M'\right)$ sont concourantes ou parallèles.

   En déduire une construction géométrique simple de $M' = T(M)$ pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ connaissant I, $M_0 \notin I$ et $M'_0 = T\left(M_0\right)$. (On supposera d'abord que la droite (M_0M) n'est pas parallèle à Oy).

4. Montrer que la transformation T est déterminée si l'on suppose qu'elle admet pour ensemble I des points invariants la droite d'équation $y = x + 1$ et que le point M_0 de coordonnées $(3~;~-2)$ a pour image M'_0 de coordonnées $(3~;~1)$. (Pour ce faire, on déterminera les réels $(a,\ b,\ c)$ correspondant à T).

   Vérifier que, dans ce cas, T est bijective.

   Construire géométriquement l'image M'_1 du point M_1 de coordonnées $(-1~;~2)$, puis l'image M''_0 du point M'_0, enfin l'antécédent $T^{-1}\left(M_0\right)$ de M_0.

   (Le candidat fera le dessin sur la feuille de papier quadrillé qui lui est remise en supposant le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé (l'origine étant sensiblement au centre de la feuille) et en prenant le centimètre comme unité. On expliquera brièvement ses constructions).

   Soit M un point quelconque de $\mathscr{P}$, H le projeté de M sur I parallèlement à Oy. Vérifier, par le calcul et sur le dessin, que $\overrightarrow{HM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HM}$.

Partie B

On suppose les trois réels a, b, c donnés, b étant différent de 0.
t est la translation de $\mathscr{P}$ de vecteur $-\overrightarrow{\imath}$ (opposé de $\overrightarrow{\imath}$). f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Γ est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Montrer que si f est telle que $T(\Gamma) = t(\Gamma)$, alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+1) = ax + bf(x) + c.$$

   En déduire que, si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée f' satisfait à la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f''(n) = b^n f''(0).$$

2. β désignant un réel positif ou nul, déterminer les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = g''(0)\mathrm{e}^{\beta x}.$$

3. Supposant $b > 0$, on se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables, satisfaisant à la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = ax + bf(x) + c$$

et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f''(0).b^x = f''(0)\mathrm{e}^{x \ln b}$$

($\ln b$: logarithme népérien de b)

En utilisant les résultats de la question 2. précédente, montrer que les fonctions solutions sont telles que :

a. si $b = 1$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{a}{2}x^2 + \left(c - \dfrac{a}{2}\right)x + f(0)$

b. si $b \neq 1$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{a}{1-b}x + \left[\dfrac{c}{1-b} - \dfrac{a}{(1-b)^2}\right](1-b^x) + f(0)b^x.$

4. Soit $a = b = c = \dfrac{1}{2}$. Étudier dans ce cas les variations de la fonction f_1 solution du problème posé dans la question précédente, et telle que $f_1(0) = 1$. Tracer la courbe Γ_1 d'équation
$y = f_1(x)$.

Partie C

a, b, c étant trois réels donnés tels que $b \neq 0$, $U = (u_n,\ n \in \mathbb{N})$ est la suite réelle de premier terme u_0 et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = an + bu_n + c.$$

1. Montrer que s'il existe une courbe Γ définie dans la partie B (c'est-à-dire telle que $T(\Gamma) = t(\Gamma)$, T correspondant aux trois réels a, b, c) qui passe par le point de coordonnées $(0\,;\ u_0)$, alors tous les points de coordonnées $(n\,;\ u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à Γ.

En déduire u_n en fonction de n lorsque $b = 1$, puis lorsque b est strictement positif et différent de 1.

Montrer que la formule donnant u_n en fonction de n pour $b \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\}$ s'étend au cas $b < 0$.

2. Comment faut-il choisir a, b, c et u_0 pour que la suite U soit :

a. constante

b. une suite arithmétique

c. une suite géométrique?

3. Comment faut-il choisir a, b, c et u_0 pour que la suite u soit convergente?

Calculer alors sa limite.