

∞ Baccalauréat C Rennes juin 1979 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit K l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

On note E l'ensemble des entiers naturels s'écrivant en base dix \overline{ababab} où (a, b) est un couple quelconque de K^2 .

1. Quel est le nombre d'éléments de E ?
2. Si $n = \overline{ababab}$, démontrer que \overline{ab} divise n .
3. Quel est le plus grand diviseur commun à tous les éléments de E ?
Quelle est la somme des éléments de E ?

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère dans un plan affine euclidien orienté un triangle isocèle ABC rectangle en A tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{2}$.

On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

1. Déterminer $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$ (nature et éléments caractéristiques).
2. Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 son image par F_2 . Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2 ?

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A - Préliminaire

Soit E la fonction qui à tout réel x , associe le plus grand entier inférieur ou égal à x , et g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $g(x) = x - E(x)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, E(x+k) = E(x) + k$.

En déduire que g est périodique.

Représenter graphiquement g (en repère orthonormé) sur l'intervalle $[-1; +1[$ de \mathbb{R} .

Étudier la continuité de g au point 0.

Partie A - Les parties I et II, qui suivent, sont indépendantes

Soit F l'ensemble des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . On rappelle que F muni de l'addition des applications, et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On note f_1, f_2, f_3 les éléments de F définis par :

$$\begin{cases} f_1(t) &= E(t) \\ f_2(t) &= 2^{t-E(t)} \\ f_3(t) &= 2^{2(t-E(t))} \end{cases}$$

où E est la fonction définie dans le préliminaire.

On appelle H le sous-espace vectoriel de F engendré par f_1, f_2, f_3 .

I

1. Soit $B = (f_1, f_2, f_3)$. Démontrer que B est une base de H .
2. Soit ψ l'application linéaire de H vers H définie dans la base B de la façon suivante : un vecteur quelconque f de coordonnées (x, y, z) a pour image $\psi(f)$ de coordonnées (x', y', z') telles que :

$$\begin{cases} x' &= & y + 3z \\ y' &= & -3x + 4y + 9z \\ z' &= & x - y - 2z \end{cases}$$

Montrer que ψ est une projection vectorielle dont on précisera les caractéristiques géométriques.

3. Soit $f = xf_1 + yf_2 + zf_3$ un élément de H . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que f soit continue sur \mathbb{R} .
En déduire que $\psi(H)$ l'image de H par ψ est aussi le sous-espace vectoriel des applications de H continues sur \mathbb{R} .
4. Montrer que les applications de H dérivables sur \mathbb{R} constituent un sous-espace vectoriel D de H inclus dans $\psi(H)$.

II

Soit h l'élément de H défini par : $h = f_1 - 2f_2 + f_3$.

1. a. Montrer que, pour tout k élément de \mathbb{Z} , la courbe représentative Γ de h dans un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par la translation T_k de vecteur $V_k = k(\vec{i} + \vec{j})$.
b. Établir le tableau de variations de h sur $[0; 1]$ et étudier la dérivabilité de h à droite en 0 et à gauche en 1.
Représenter graphiquement la restriction de h à l'intervalle $[-1; 3]$ (le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sera orthonormé, et on prendra 2 cm pour unité).
2. Démontrer que h est intégrable sur tout intervalle fermé de \mathbb{R} , et calculer pour tout n de \mathbb{N} :

$$U_n = \int_n^{n+1} h(t) dt.$$

Démontrer que la suite de terme général U_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Retrouver ce dernier résultat en donnant une interprétation graphique de U_n .