

∞ Baccalauréat C Rennes juin 1981 ∞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $23X - 17Y = 6$.
2. Dédire de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 1 000 tels que dans la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2, et dans celle de A par 17 le reste soit 8.

EXERCICE 2

1. Montrer que si x est un réel strictement positif

$$1 + \frac{1}{x} > e^{-x}.$$

Montrer que si x est un réel strictement négatif $1 + \frac{1}{x} < e^{-x}$.

(On pourra comparer $1 + \frac{1}{x}$ et e^{-x} au nombre 1).

2. Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = x + \ln|x| + e^{-x}.$$

(\ln désigne la fonction logarithme népérien).

Étudier f , (ne pas oublier l'étude des limites quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et construire sa courbe représentative).

PROBLÈME

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct d'un plan affine euclidien P . Soit P le plan vectoriel associé à P . On appelle \mathcal{A} l'ensemble des applications affines de P transformant toute droite D de P en une droite D' orthogonale à D .

Partie A

1. Vérifier que la rotation R de centre O dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radian est un élément de \mathcal{A} .
2. On appelle φ l'endomorphisme du plan vectoriel \vec{P} associé à l'application affine. Montrer que f appartient à \mathcal{A} si, et seulement si, pour tout vecteur non nul \vec{u} : $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \cdot \varphi(\vec{u}) = 0$.
3. Montrer que si f appartient à \mathcal{A} , la matrice de φ dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ où λ est un réel non nul.
En déduire que f est une similitude directe, en préciser le rapport et l'angle suivant les valeurs de λ .

4. En déduire quel est l'ensemble \mathcal{A} .

Partie B

Dans cette partie, on désigne par \mathcal{B} l'ensemble des applications (non supposées affines) de P dans P , transformant toute droite D de P en une droite D' de P orthogonale à D . On se propose de montrer qu'une telle application est nécessairement affine et donc que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

1. Soit f_1 un élément de \mathcal{B} .
- a. Montrer qu'il existe au moins un couple de points (A, B) tel que

$$A \neq B \quad \text{et} \quad f_1(A) \neq f_1(B)$$

On notera $A' = f_1(A)$ et $B' = f_1(B)$.

- b. On appelle M un point de P n'appartenant pas à la droite AB . Montrer que $M' = f_1(M)$ peut être obtenu comme intersection de deux droites que l'on précisera.
En déduire une construction de M' .
2. Soit f_2 la similitude plane directe transformant A en A' et B en B' (c'est-à-dire que $f_2(A) = f_1(A)$ et $f_2(B) = f_1(B)$).
- a. Donner une mesure de l'angle de f_2 .
- b. Si M n'est pas un point de la droite AB , montrer que $f_2(M) = f_1(M)$.
- c. Si M est un point de la droite AB , indiquer une construction de $f_1(M)$. (On pourra introduire un point C n'appartenant pas à la droite AB).
- d. En déduire que $f_1 = f_2$ On a ainsi prouvé que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Partie C

R désigne toujours la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radian. La loi \circ est la composition des deux applications.

1. Montrer qu'on définit une loi interne, notée \star , sur \mathcal{A} en posant

$$\forall f \in \mathcal{A}, \forall g \in \mathcal{A}, \quad f \star g = f \circ R \circ g.$$

2. Montrer qu'il existe dans \mathcal{A} un élément e , neutre pour la loi \star .
3. Soit \mathcal{D} l'ensemble des homothéties de rapport non nul et des translations. Montrer que pour tout h appartenant à \mathcal{D} , $e \circ h$ appartient à \mathcal{A} .
Soit L l'application de \mathcal{D} dans \mathcal{A} qui à h associe $e \circ h$. Montrer que L est un isomorphisme du groupe (\mathcal{D}, \circ) sur (\mathcal{A}, \star) .