

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Rennes ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$$

(\ln désigne le logarithme népérien).

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit λ un réel supérieur à 1 et

$$\Delta_k = \left\{ M(x; y) \left| \begin{array}{l} 1 \leq x \leq \lambda \\ 1 \leq y \leq f(x) \end{array} \right. \right\}$$

Calculer l'aire $\mathcal{A}(\Delta_k)$ de Δ_k .

Étudier la limite de $\mathcal{A}(\Delta_k)$ quand λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

4 points

1. Étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
2. Dans le système de numération décimale déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ défini par

$$A(n) = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n.$$

PROBLÈME

12 points

Soit \mathcal{P} le plan vectoriel euclidien muni de la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, P le plan affine euclidien muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (Δ) la droite affine d'équation $x - 2y = 0$, (D) la droite vectorielle de base \vec{j} .

Dans toute la suite du problème S désigne la symétrie affine par rapport à la droite (Δ) , suivant la droite vectorielle (D) ; σ est l'endomorphisme associé à S .

On appelle \mathcal{F} l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que $f \circ S = S \circ f$.

Partie A

1. Démontrer que \mathcal{F} n'est pas l'ensemble vide et que \mathcal{F} est stable pour la loi de composition des applications, notée \circ .
Montrer que (\mathcal{F}, \circ) est un groupe.

2. Au point $M(x; y)$, la symétrie affine S associe un point $M_0(x_0; y_0)$. Donner x_0 et y_0 en fonction de x et y .
3. Soit g l'application de P dans P qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$:

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' &= -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que $g \in \mathcal{F}$.

4. Soit f une application affine bijective de P dans P d'endomorphisme associé φ .
Démontrer que f est élément de \mathcal{F} si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réalisées simultanément :

$$\begin{cases} f(0) \in (\Delta) \\ \exists a \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(2\vec{i} + \vec{j}) = a(2\vec{i} + \vec{j}) \exists b \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(\vec{j}) = b\vec{j} \end{cases}$$

Écrire alors en fonction de a et b la matrice M de φ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Vérifier ce résultat dans le cas particulier étudié au 3.

5. **a.** Préciser les couples (a, b) pour que f soit une homothétie (caractériser géométriquement f).
- b.** Préciser les couples (a, b) pour que f soit une translation. Caractériser f .
6. On appelle \mathcal{F}_1 le sous-ensemble des éléments de \mathcal{F} dont l'endomorphisme associé φ vérifie $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$.
- a.** Montrer que (\mathcal{F}_1, \circ) est un groupe.
- b.** Soit f_1 un élément de \mathcal{F}_1 .

Démontrer que $M(x; y)$ a pour image $f_1(M) = M'$ de coordonnées $(x'; y')$:

$$\begin{cases} x' &= ax + 2\alpha \\ y' &= \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R}^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ? (On discutera selon les valeurs de a et de α).

- c.** Vérifier que l'application g proposée au 3. est un élément de \mathcal{F}_1 . On note $M' = g(M)$.

Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par g . Si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.

Calculer alors les coordonnées du point M_1 commun à la droite (MM') et à (E).

Comparer $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{M_1M}$; en déduire une construction géométrique de M' .

Partie B

1. Soit F la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$F(x) = e^x + \frac{1}{2}x.$$

Étudier et représenter F dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de F .

2. a. Soit f_1 un élément quelconque de \mathcal{F}_1 . Déterminer une équation de l'image de (C) par f_1 .
b. Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(C_{m, p})$ la courbe d'équation

$$y = e^{mx+p} + \frac{1}{2}x$$

dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que $(C_{m, p})$ est l'image de (C) par une application appartenant à \mathcal{F}_1 .

3. Soit Γ la courbe d'équation

$$y = e^{-2x+2} + \frac{1}{2}x.$$

En utilisant les résultats de la partie A, reconnaître l'application élément de \mathcal{F}_1 qui transforme (C) en Γ .

Dessiner Γ à partir du tracé de (C) .

4. Construire l'image (C') de (C) par $g \circ S$.
5. $(m', p') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer, en utilisant A 6. a. que toute autre courbe $(C_{m', p'})$ est l'image de la courbe $(C_{m, p})$ par une application appartenant à \mathcal{F}_1 .