

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Rennes septembre 1971 ∞

**EXERCICE 1**

À tout couple  $(x, n)$  d'entiers  $x$  et  $n$  supérieurs ou égaux à deux, on associe le nombre entier, noté  $a(x, n)$ , qui, dans le système de numération de base  $x$ , s'écrit avec  $n$  chiffres dont le premier et le dernier sont des 1 et les autres (s'il y en a) des 0.

Ainsi,  $a(\text{trois}, \text{deux})$  s'écrit 11 en base « trois », c'est l'entier « quatre » ;  $a(\text{trois}, \text{trois})$  s'écrit 101 en base « trois », c'est l'entier « dix ».

1. Montrer que, quelle que soit la base  $x$ ,  $a(x, n)$  est divisible par  $a(x, \text{deux})$  si  $n$  est pair et ne l'est pas si  $n$  est impair.
2. À quelles conditions doivent satisfaire les entiers  $x$  et  $n$  pour que le nombre  $a(x, n)$  soit divisible par le nombre « trois » ?

**EXERCICE 2**

Dans un plan rapporté à un système orthonormé d'axes  $x'Ox, y'Oy$ , la position d'un point mobile à l'instant  $t$ ,  $M(t)$  est définie par ses coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = e^{\sin t}, \\ y(t) = e^{\cos t}, \end{cases}$$

pour  $t$  variant de 0 à  $2\pi$ .

1. En se déplaçant sur sa trajectoire, le point mobile rencontre la droite d'équation  $y = 1$  en quatre points A, B, C et D, dont on déterminera les coordonnées.  
Quelles sont les dates de passage en chacun des points A, B, C et D ?
2. Déterminer le vecteur vitesse du point mobile aux différentes dates de passage en chacun des points A, B, C et D.

**PROBLÈME**

1.  $\lambda$  désignant un nombre réel donné non nul, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox, y'Oy$ , la transformation ponctuelle  $T_\lambda$  qui fait correspondre au point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  le point  $M$  de coordonnées  $(x' ; y')$ , telles que

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x^2 + \lambda y. \end{cases}$$

- a. Montrer que  $T_\lambda$  est une bijection du plan sur lui-même.
- b. Trouver les points doubles de  $T_\lambda$ .

c. Quelle est la transformée par  $T_\lambda$  d'une droite d'équation  $ux + vy + w = 0$ ?

2. a. Soit  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$  les courbes d'équations respectives

$$y = f_1(x) = x^2 + 2|x - 1|$$

et

$$y = f_2(x) = x^2 + 2e^x.$$

Étudier les variations des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  et construire les courbes  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$  (On montrera que l'équation  $f_2'(x) = 0$  a une racine, dont on donnera une valeur approchée.)

b. Soit  $A$  l'ensemble des points du plan de coordonnées  $(x ; y)$  dont l'abscisse  $x$  est comprise entre  $-1$  et  $1$  et dont l'ordonnée  $y$  est comprise entre  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ . Calculer l'aire de  $A$ .

3. a.  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$  sont les images par  $T_2$  de deux courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  du plan. Quelles sont les équations de  $(C_1)$  et  $(C_2)$  :

$$y = g_1(x) \quad \text{et} \quad y = g_2(x)?$$

b. Soit  $g$  la fonction définie par

$$g(x) = g_1(x) \text{ pour tout réel } x \text{ pour lequel } g_1(x) \geq g_2(x),$$

$$g(x) = g_2(x) \text{ pour tout réel } x \text{ pour lequel } g_1(x) < g_2(x)$$

et soit  $(C)$  la courbe d'équation  $y = g(x)$ .

Quelle est la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $y = f(x)$  soit l'équation de la courbe  $(\Gamma)$  transformée de  $(C)$  par  $T_2$ ?

Montrer que  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer la primitive  $\Phi$  de  $f$  telle que  $\Phi(1) = 0$ .

En déduire l'aire du domaine limité par l'axe  $x'Ox$ , les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 2$  et la courbe  $(\Gamma)$ .