Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rennes septembre 1975

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(1 ; 0)$ et le point B de coordonnées $(0 ; 1)$.

Soit S_1 la similitude plane directe de centre A, d'angle dont une détermination est $\dfrac{2\pi}{3}$ et de rapport 2.

Soit S_2 la similitude plane directe de centre B, d'angle dont une détermination est $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

1. Quelle est la nature de $T = S_2 \circ S_1$?
2. Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$, M' le transformé de M par T.
   Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction de celles de M.

EXERCICE 2

1. Montrer que l'équation :

   $$7x + 11y = 1 \qquad (1)$$

   admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation :

   $$\dot{7} \,.\, x = \dot{1} \qquad (2)$$

3. Donner toutes les solutions de l'équation (1).

PROBLÈME

Soit Ω l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et E l'ensemble des fonctions f de Ω possédant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = 0 \quad (1)$$

1. Montrer que Ω, muni de l'addition des fonctions et de la loi de multiplication des fonctions par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que la fonction f_1 définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \text{e}^x$$

   est élément de E.
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de Ω.

2. A tout élément f de E on associe la fonction g de Ω définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x).$$

Montrer que g vérifie la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'''(x) = 0$.
Réciproquement, montrer qu'à toute fonction g de Ω telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'''(x) = 0$$

on peut associer une fonction f de E.
En déduire que :

$$E = \left\{ f / \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(a + bx + cx^2\right)\mathrm{e}^x, \quad (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

3. On appelle f_1, f_2, f_3 les trois fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad f2(x) = x\mathrm{e}^x, \quad f3(x) = x^2\mathrm{e}^x.$$

Montrer que $\mathcal{B} = \left(f_1,\, f_2,\, f_3\right)$ est une base de E. Etudier les fonctions f_1, f_2, f_3 et tracer dans un même repère leurs courbes représentatives respectives C_1, C_2, C_3.

4. **a.** Montrer que si f est un élément quelconque de E, la fonction dérivée de f, f', est aussi élément de E.
En déduire que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$ (n entier naturel non nul), la dérivée d'ordre n de f, que l'on note $f^{(n)}$, est élément de E.
Soit D l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'$$

Montrer que D est linéaire. Exprimer les coordonnées de f' dans la base :n en fonction de celles de f. En déduire que D est bijective. Déterminer D^{-1} puis une primitive de f.
λ désignant un réel négatif, calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine limité par les courbes C_2, C_3 et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 0$. Cette aire a-t-elle une limite quand λ tend vers $-\infty$?

b. Soit F le plan vectoriel de E, de base $\mathcal{B}' = \left(f_1,\ f_2\right)$. Montrer que $\forall h \in F, \quad D(h) \in F$.
Soit $D^\star$ l'application de F dans F définie par :

$$\forall h \in F, \quad D^\star(h) = D(h)$$

$D^\star$ est linéaire. Quelle est la matrice Δ, de $D^\star$ dans $\mathcal{B}'$.
Calculer $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$, $\Delta^3 = \Delta^2 \times \Delta$, puis Δ^n (n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 3).
(On rappelle que, $n \geqslant 2, \quad \Delta^n = \Delta^{n-1} \times \Delta$.
Soit h un élément de F de coordonnées $(a\,;\ b)$ dans $\mathcal{B}'$.
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la fonction dérivée n-ième de h, $h^{(n)}$, est élément de F et calculer les coordonnées $(a_n\,;\ b_n)$ de $h^{(n)}$ en fonction de a et b.

5. **a.** α désignant un réel donné, à toute fonction réelle φ définie sur $\mathbb{R}$, on fait correspondre la fonction φ_α définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \varphi(x+\alpha).$$

Montrer que si φ est élément de E, φ_α est alors aussi élément de E.

À tout nombre réel α, on associe alors l'application T_α de E dans E définie par :

$$\forall f \in E, \quad T_\alpha(f) = f_\alpha.$$

Montrer que T_α est linéaire.

E étant rapporté à la base $\mathscr{B}$, exprimer les coordonnées de $T_\alpha(f)$ en fonction de celles de f.

En déduire que T_α est bijective.

b. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des applications $T_\alpha(f)$ lorsque α décrit $\mathbb{R}$.

Montrer que : $T_\alpha(f) = T_\beta(f) \iff \alpha = \beta$.

α et β désignant deux réels quelconques, montrer que :

$$T_\alpha \circ T_\beta \in \mathscr{T};$$

En déduire que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{T}$ qui, à α, fait correspondre T_α est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ dans $(\mathscr{T},\ \circ)$.

On pose $T_\alpha^0 = \mathrm{Id}_E$ (Id_E désigne l'application identique de E dans E) et

$$\forall n \geqslant 1, \quad T_\alpha^n = T_\alpha^{n-1} \circ T_\alpha.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_\alpha^n = T_{n\alpha}$.

Calculer dans la base $\mathscr{B}$ les coordonnées de $T_\alpha^n(f)$ en fonction de celles de f.

c. Montrer que : $\forall h \in F, \quad T_\alpha(h) \in F$.

Soit $T_\alpha^\star$ l'application de F dans F définie par :

$$\forall h \in F, \quad T_\alpha^\star(h) = T_\alpha(h)$$

Montrer que T_α est une application linéaire bijective.

On pose $T_\alpha^{\star n}(h) = \lambda_n f_1 + \mu_b f_2$.

Calculer les coordonnées de h dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction de λ_n et μ_n.

N. B. : Le candidat pourra considérer comme connue la propriété suivante :
L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des lois + et . est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.