Baccalauréat C Rennes septembre 1976

EXERCICE 1

1. Étudier les variations de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \text{e}^{x} - \text{e}^{-x}.$$

2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. Écrire l'expression de f^{-1} (on pourra effectuer le changement de variable défini par $\text{e}^{x} = X$).
3. Déterminer la fonction dérivée de f^{-1} et calculer l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\,\text{d}t.$$

EXERCICE 2

Soit A l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $[\text{O}\,;\,2[$ dans $\mathbb{R}$.
$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ les éléments de A définis par :

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & 1-x\\ f_2(x) & = & |1-x|\\ f_3(x) & = & \text{E}(x)\\ f_4(x) & = & x\,.\text{E}(x)\end{array}$$

$\text{E}(x)$ désignant la partie entière de x.

1. Montrer que $\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$ est un système libre.
2. Montrer que f_4 appartient au sous-espace vectoriel engendré par $f_1,\ f_2,\ f_3$ et calculer les composantes de f_4 dans la base $\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
À tout point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;\ y)$ on associe le nombre complexe z affixe de M.

Partie A

1. Soient deux points M_1 d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2 ; montrer que M_1 et M_2 appartiennent à la même demi droite d'origine O si et seulement si

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

(on pourra par exemple écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique).

2. En déduire que trois points M_1 d'affixe z_1, M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3 sont sur la même demi droite d'origine O si et seulement si :

$$|z_1 + z_2 + z\circ 3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

Partie B

Soient A_1, A_2 et A_3 trois points dont les affixes a_1, a_2, a_3 vérifient :

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$$

Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O si et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. (On pourra considérer l'isobarycentre des points A_1, A_2 et A_3).

Partie C

Soient B_1, B_2 et B_3 trois points dont les affixes b_1, b_2, b_3 vérifient $\dfrac{b_1}{|b_1|} + \dfrac{b_2}{|b_2|} + \dfrac{b_3}{|b_3|} = 0$.

On pose $\alpha_1 = \dfrac{b_1}{|b_1|}$, $\alpha_2 = \dfrac{b_2}{|b_2|}$, $\alpha_3 = \dfrac{b_3}{|b_3|}$.

1. Montrer que le nombre $S = \overline{\alpha_1}\,(z - b_1) + \overline{\alpha_2}\,(z - b_2) + \overline{\alpha_3}\,(z - b_3)$ est indépendant de z. Calculer $|S|$ et en déduire que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |b_1| + |b_2| + |b_3| \leqslant |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3|$$

2. Montrer que pour que l'affixe z d'un point M vérifie la relation

$$(1) \qquad |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3| = |b_1| + |b_2| + |b_3|$$

il faut et il suffit que les trois angles de vecteurs

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OB_1},\ \overrightarrow{B_1M}}\right),\ \left(\widehat{\overrightarrow{OB_2},\ \overrightarrow{B_2M}}\right),\ \left(\widehat{\overrightarrow{OB_3},\ \overrightarrow{B_3M}}\right)$$

soient égaux.

Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie (1) ?

3. Soient MB_1, MB_2, MB_3 les distances respectives de M aux points B_1, B_2 et B_3. On pose $S(M) = MB_1 + MB_2 + MB_3$.

Démontrer que l'ensemble des réels $S(M)$ pour M appartenant à $\mathcal{E}$ a un plus petit élément.

Partie D

Soit ABC un triangle dont chaque angle géométrique a une mesure en radians inférieure à $\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer par une construction géométrique simple le point M qui réalise le minimum de $MA + MB + MC$.